



12. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 (3 Punkte)

Berechne das 2-dimensionale Volumen der folgenden Flächen in \mathbb{R}^3 .

1. $z = xy$ mit $x^2 + y^2 \leq 1$;
2. $z = 2x + 3y + 4$ mit $0 \leq y \leq x^2 \leq 1$;
3. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ mit $x^2 + y^2 \leq x$;
4. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, a \leq x \leq b, z \geq 0\}$, wobei $-R \leq a < b \leq R$ ist.

A 2 (2 Punkte)

Sei $a > 0$. Berechne die folgenden Flächenintegrale.

1. $\int_M y^2 z dS_M$ mit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$;
2. $\int_M z^4 dS_M$ mit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

A 3 (2 Punkte)

Sei $0 < r < R < \infty$. Bestimme das 2-dimensionale Volumen des Torus

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2\}.$$

A 4 (4 Punkte)

Entscheide, ob es möglich ist, einen Kreis vom Durchmesser 100 mit 99 Streifen der Breite 1 zu überdecken. (Die Streifen sind unendlich lang.)

Hinweis: Benutze die Aufgabe A1(4).

A 5 (6 Punkte)

Ist (X, S, μ) ein Massraum und $\phi : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, so definieren wir eine Abbildung $\phi[\mu] : \phi[S] \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\phi[\mu](A) := \mu(\phi^{-1}(A)) \quad A \in \phi[S],$$

wobei $\phi[S] := \{A \subset Y : \phi^{-1}(A) \in S\}$ das direkte Bild von S unter ϕ ist.

1. Zeige, dass $\phi[\mu]$ ein Mass auf $(Y, \phi[S])$ ist.
2. Zeige, dass eine Funktion $f : Y \rightarrow Z$ in einem messbaren Raum (Z, \mathfrak{T}) genau dann auf $(Y, \phi[S])$ messbar ist, wenn $f \circ \phi : X \rightarrow Z$ auf (X, S) messbar ist.
3. Zeige, dass

$$\int_Y f d\phi[\mu] = \int_X f \circ \phi d\mu$$

für jede auf $(Y, \phi[S])$ messbare Funktion $f : Y \rightarrow [0, \infty]$, unter Benutzung des in Übung 10, A3 beschriebenen Beweisprinzips.

4. Zeige, dass eine Funktion $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann bezüglich $\phi[\mu]$ integrierbar ist, wenn $f \circ \phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. μ integrierbar ist.