Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

27. Juni 2007

10. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 **(Fourier Transformation)** (9 Punkte)
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sei wieder $\hat{f} = \mathcal{F}f$ die Fourier Transformierte von f.

Im folgenden seien stets $\phi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und es existiere ein $R > 0$ mit $\phi(x) = \psi(x) = 0$ für $|x| > R$. Außerdem schreiben wir $\phi^-(x) = \phi(-x)$.

Beweise die folgenden Eigenschaften

1. $\hat{\phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
2. (Ein Eigenvektor) Für $\eta(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ gilt $\hat{\eta}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$.
3. (Umkehrformel) $\mathcal{F}^2\phi = (2\pi)^n \phi^-$.
4. (Parseval'sche Formel)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}\overline{\hat{\psi}}\, d\lambda = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \phi\overline{\psi}\, d\lambda.$$
5. $\|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, wobei $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int |\phi|^2\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$.

Hinweise: Zu 1.: Verwende Übung 9 A 5.3.

Zu 2.: Verwende den Satz von Fubini, quadratische Ergänzung und den Cauchy'schen Integralsatz

Zu 3.: Es gilt $e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\phi(y) \notin L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Das heißt, man kann den Satz von Fubini nicht ohne weiteres anwenden. Um dieses Problem zu umgehen, füge den Extrafaktor $\eta(\varepsilon\xi)$ mit $\eta(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ ein. Betrachte den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$.

4. und 5. folgen dann relativ einfach aus 3.

A 2 **(Das Dirac-Maß)** (5 Punkte)

(a) Es sei X eine Menge, $x \in X$ und $\delta_x \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ die durch
$$\delta_x(A) \ := \ \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A; \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$
definierte Funktion. Prüfe nach, dass δ_x ein Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$ ist.

(b) Gegeben sei eine Menge X und $x \in X$. Zeige, dass
$$\int_X f\, d\delta_x \ = \ f(x)$$
für jede Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$.

(c) Was bedeutet fast überall Konvergenz bezüglich des Maßes δ_x?

A 3 **(Maße mit Dichten)** (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f \geq 0$ eine messbare Funktion auf $(\Omega, \mathcal{S})$. Dann ist nach Satz 2.6 durch $\nu(A) := (f\mu)(A) := \int_A f \, d\mu$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{S})$ definiert.

Dieses Maß nennen wir das Maß mit Dichte f bezüglich μ

Beweise: Eine messbare Funktion g auf $(\Omega, \mathcal{S})$ ist genau dann bezüglich ν integrierbar, wenn $g \cdot f$ bezüglich μ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu.$$

Hinweis: Beginne mit charakteristischen Funktionen, dann zeige das Ergebnis für Stufenfunktionen und als nächstes für nicht negative Funktionen.

A 4 **(Ein Flächeninhalt)** (3 Punkte)
Berechne den beschränkten Teil der Ebene, der durch die implizit gegebene Kurve

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2xy = 0, \qquad (a > 0 \ \text{ fest})$$

umschlossen wird.

Orientierungskolloquium

Die Forschungsgebiete des Fachbereichs Mathematik stellen sich vor.

Montag, 25.06.2007 – 16:15-17:15 Uhr – S214/024

PD Dr. Steffen Roch
FG Analysis
„Integralgleichungen und numerische Analysis“

Nach dem Vortrag gibt es ein gemütliches Treffen in S215/219, um über den Vortrag zu reden und den Vortragenden näher kennenzulernen.