Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

20. Juni 2007

9. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 (Nullmengen) (1 Punkt)
Beweise, dass eine offene Lebesgue-Nullmenge die leere Menge ist.

A 2 (Fast überall Konvergenz) (3 Punkte)
Finde eine Folge integrierbarer Funktionen (f_n), $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass

1. eine Grenzfunktion f existiert mit
$$\int_{[0,1]} |f_n - f| \, d\lambda \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$
2. $f_n(x) \to f(x)$ für kein $x \in [0,1]$,
3. keine Teilfolge $(f_{n_j})_j$ existiert, für die $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ gilt.

A 3 (Ein Flächeninhalt) (3 Punkte)
Es seien p, q, a, b reelle Zahlen mit $0 < p < q$ une $0 < a < b$. Abschnitte der Parabeln
$$y^2 = px, \quad y^2 = qx, \quad x^2 = ay, \quad x^2 = by$$
bilden ein krummlinig berandetes Viereck M in $\mathbb{R}^2$.

Berechne den Flächeninhalt von M mittels des Transformationssatzes und einer Koordinatentransformation
$$T : (0,\infty) \to (0,\infty), \quad T(u,v) = (x,y),$$
die bewirkt, dass die Parabelstücke als Koordinatenlinien $\{u = const.\}$ und $\{v = const.\}$ erscheinen.

A 4 (Ein Volumen und ein Integral) (4 Punkte)
Es seien A eine positiv definite symmetrische $(n \times n)$-Matrix und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) = f(x_1, ..., x_n) := \langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

1. Bestimme das Volumen des durch $f(x) \le 1$ beschriebenen Ellipsoids, also $\lambda(\{x \,|\, f(x) \le 1\})$. Hierbei darf das Volumen ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel als bekannt angenommen werden.
2. Berechne auch das Integral
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x)} \, dx.$$

A 5 (Fourier Transformation) (6 Punkte)
Wir betrachten nun Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Solche Funktionen nennen wir integrierbar, wenn $|f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. In diesem Fall schreiben wir $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,
$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re} f \, d\lambda + i \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Im} f \, d\lambda$$
und $\|f\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\lambda$.

Für $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Fourier Transformierte
$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x) \, dx.$$

Beweise die folgenden Eigenschaften:

1. Für $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|\hat{u}\|_\infty < \infty$.
2. Ist $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\phi \in C^\infty(\Omega)$ und gibt es ein $R > 0$, so dass $\phi(x) = 0$ für $\|x\| > R$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\phi(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} u(-x)\overline{\hat{\phi}(x)}dx.$$

3. Ist $\phi \in C^\infty(\Omega)$ und gibt es ein $R > 0$, so dass $\phi(x) = 0$ für $\|x\| > R$, so gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\widehat{\partial^\alpha \phi}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{\phi}(\xi) \quad \text{und} \quad \widehat{x^\alpha \phi}(\xi) = (i\partial)^\alpha \hat{\phi}(\xi).$$

Hierbei bedeutet $\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ und $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.