Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Juni 2007

7. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 **(Fast überall punktweise Konvergenz)** (4 Punkte)
Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mu)$. Das heißt, jedes $f_n : M \to \mathbb{R}$ sei messbar und es gelte

$$\|f_m - f_n\|_{1,\mu} = \int_M |f_m - f_n| d\mu \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Zeige, dass (f_n) eine Teilfolge hat, die fast überall punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert.

Folgere hieraus die Vollständigkeit von $L^1(\mu)$.
Hinweise: Konstruiere eine Teilfolge $(f_{n_j})_j$ mit

$$\|f_{n_j} - f_{n_{j+1}}\|_{1,\mu} < \frac{1}{2^j}.$$

Beweise, dass $g := |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^1(\mu)$. Verwende $f := f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ als Kandidaten für die Grenzfunktion.

Anmerkung der Redaktion: Ganz analog beweist man auch die Vollständigkeit von $L^p(\mu)$ mit $1 < p < \infty$. Identifiziert man zwei Funktionen, die sich höchstens auf einer Nullmenge unterscheiden, so erhält man einen vollständigen normierten Vektorraum, einen sogenannten Banachraum.

A 2 **(Faltung mit Mollifiern)** (4 Punkte)
Sei $0 \leq \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit $\int_R \phi \, d\lambda = 1$ und es gebe ein $R > 0$, so dass $\phi(x) = 0$, falls $|x| > R$. Für ein integrierbares f betrachten wir die Funktion

$$F_\phi(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x-t) f(t) \, \lambda(dt) = \phi * f(x).$$

$\phi * f$ heißt die Faltung von ϕ mit f.

1. Beweise, dass $F_\phi(f)$ differenzierbar ist.
2. Sei $\phi_\delta(t) := \frac{1}{\delta}\phi(\frac{t}{\delta})$. Sei außerdem f stetig. Beweise

$$F_{\phi_\delta}(f)(x) \xrightarrow{\delta\to 0} f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

A 3 **(Parametrisierung von Körpern im $\mathbb{R}^3$)** (3 Punkte)
Finde je eine Parametrisierung für die folgenden Körper im $\mathbb{R}^3$.

1. Eine Kugel (in karthesischen Koordinaten)
2. Einen Kegelstumpf (in Zylinderkoordinaten)
3. Einen Würfel, mit einer würfelförmigen Aussparung in der Mitte (in welchen Koordinaten wohl?)

Es ist Dir natürlich freigestellt, welche Kugel, welchen Kegelstumpf und so weiter Du parametrisierst.

A 4 **(Satz von Fubini)** (4 Punkte)

Berechne das Integral $\int_A f \, d\lambda_2$, wobei ...

(a) A das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ist und

$$f(x,y) \;:=\; x^2 + y^3 + 2xy^2 \,;$$

(b) A das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$ ist und

$$f(x,y) \;:=\; xy - 3\cos(x+y) \,.$$

A 5 **(Berechnung eines Volumens)** (3 Punkte)

Berechne das Volumen des von den Flächen

$$x + y = 1\,, \quad x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = 6x^2 + 2y^2 \quad \text{und} \quad z = 0$$

eingeschlossenen Körpers K.

A 6 **(Satz von Fubini)** (3 Punkte)

Berechne das Integral $\int_A (2x+y)\, d\lambda_2(x,y)$, wobei

$$A \;:=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x, y \geq 0\}\,.$$