Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

29. Mai 2007

6. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 (3 Punkte)

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx \sin x}{n^2x^2+1} dx$;
2. $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{n^2x^2 dx}{2n^2x^5+ne^x+3}$;
3. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1+\frac{x}{n})^n e^{-x} dx$.

A 2 (3 Punkte)

Finde eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f_n(x) : [0,1] \to [0,\infty)$, die gleichzeitig die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen Null.
2. Die Folge von Integralen $(\int_{[0,1]} f_n(x) d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen Null.
3. Die Funktionen $f_n(x)$ haben keine Lebesgue-integrierbare Majorante.

A 3 (3 Punkte)

1. Sei $(X,\mathfrak{S},\mu)$ ein Massraum, $g_k : X \to [0,\infty)$ messbar und $\sum_{k=1}^\infty \int_X g_k(x) d\mu < \infty$. Zeige, dass $\sum_{k=1}^\infty g_k(x)$ fast überall auf X konvergiert und dass
$$\int_X \sum_{k=1}^\infty g_k(x) d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_X g_k(x) d\mu.$$
2. Sei $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge aller rationalen Zahlen aus dem Intervall $(0,1)$. Beweise, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x-q_n|}}$$
für fast alle $x \in (0,1)$ konvergiert.

A 4 (3 Punkte)

1. Finde die folgenden Grenzwerte:
   (a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{e^{nx}+n^2x} dx$;
   (b) $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 \arctan(\frac{ne^x}{\sin x}) dx$.
2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Beweise, dass $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n^2} f(x) dx = 0$.

A 5 (4 Punkte)

Sei $(X,\mathfrak{S},\mu)$ ein Massraum und $(f_n, h_n, g_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{R}$ drei Folgen Lebesgue-integrierbarer Funktionen, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. Für alle n und fast alle $x \in X$ gilt
$$g_n(x) \le f_n(x) \le h_n(x).$$

2. Für fast alle $x \in X$ konvergieren die Folgen

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \ \lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x), \ \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

   punktweise.

3. Seien die Funktionen g, h Lebesgue-integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu = \int_X h d\mu, \ \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X g d\mu.$$

Zeige, dass die Funktion f auch Lebesgue-integrierbar ist und dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Anleitung: Verwende das Lemma von Fatou, um zu zeigen, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

gilt.

A 6 (2 Punkte)

Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Massraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to [0, \infty)$ Lebesgue-integrierbare Funktionen, für die gilt:

1. Für fast alle $x \in X$ konvergiert die Folge f_n punktweise gegen eine Lebesgue-integrierbare Funktion f.
2. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ ist.

Anleitung: Verwende Aufgabe 5.