Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

23. Mai 2007

5. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 **(Beweise oder Widerlege)** (5 Punkte)
Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : M \to \mathbb{R}$ integrierbar. Entscheide, ob die untenstehenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründe Deine Antwort.

1. Ist $f(x) = g(x)$ für fast alle x, so ist $\int_M f\, d\mu = \int_M g\, d\mu$.
2. Ist $\int_M f\, d\mu = \int_M g\, d\mu$, so ist $g(x) = f(x)$ für alle x.
3. Ist $\int_M f\, d\mu = \int_M g\, d\mu$, so ist $g(x) = f(x)$ für fast alle x.
4. Ist $\int_M |f - g|\, d\mu = 0$, so ist $g(x) = f(x)$ für fast alle x.
5. Ist $\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$ für alle $A \in \mathcal{S}$, so ist $g(x) = f(x)$ für fast alle x.

Hinweis: Die Begründungen sind unterschiedlich kompliziert.

A 2 **(Eine zappelige Funktion)** (5 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : [\pi, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x} \sin x.$$

1. Begründe, dass f Borel messbar ist.
2. Zeige, dass
$$\lim_{R \to \infty} \int_\pi^R f(x) dx$$
endlich ist, wobei das Integral im Riemann'schen Sinn zu verstehen ist.
3. Zeige, dass f nicht Lebesgue integrierbar auf $[\pi, \infty)$ ist. Ist das Integral $\int_\pi^\infty f(x) d\lambda$ wohldefiniert im Sinne von Definition 2.4?

A 3 **(fast überall)**
Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Für messbare Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ sagen wir $f \sim g$, falls $f = g$ fast überall. Beweise, dass „$\sim$" eine Äquivalenzrelation ist.

A 4 **(Die Räume $L^p(d\mu)$)** (7 Punkte)
Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Für $p \in [1, \infty)$ definieren wir den Raum

$$L^p(d\mu) = \left\{ f : M \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ messbar und } \|f\|_{p,\mu} := \left(\int_M |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

1. Entscheide, welche Eigenschaften der Norm von $\|\cdot\|_{p,\mu}$ erfüllt und welche verletzt werden.
Hinweis: Für $p \in (1, \infty)$ gilt die Hölder'sche Ungleichung
$$\left| \int_M f g\, d\mu \right| \leq \|f\|_{p,\mu} \|g\|_{q,\mu}$$
für alle messbaren $f, g : M \to \mathbb{R}$, mit $\|f\|_{p,\mu} < \infty$ und $\|g\|_{q,\mu} < \infty$, wobei $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

2. Beweise die Höldersche Ungleichung.
   Anleitung:
   - Verwende die Bernoulli'sche Ungleichung: $(1+\eta)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\eta}{p} + 1$ für alle $\eta \geq 0$.
   - Beweise, dass für alle $\alpha, \beta > 0$ gilt
   $$\alpha^{\frac{1}{p}} \beta^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}.$$
   - Setze speziell
   $$\alpha := \left(\frac{f(x)}{\|f\|_{p,\mu}}\right)^p \quad \text{und} \quad \beta := \left(\frac{g(x)}{\|g\|_{q,\mu}}\right)^q$$
   und folgere hieraus die Behauptung.

A 5 **(Zerlegung in disjunkte Mengen)** (4 Punkte)
Man betrachte einen Maßraum $(M, \mathcal{S}, \mu)$. Sei $(A_n) \subset \mathcal{S}$ eine Folge von disjunkten Mengen, deren Vereinigung M ist. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweise, dass f genau dann integrierbar ist, wenn $f : A_n \to \mathbb{R}$ für jedes A_n messbar ist und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| d\mu$ konvergiert.