Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

15. Mai 2007

4. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 (1 Punkt)

Beweise, dass $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ Lebesgue-integrierbar auf $[0,1]$ ist und bestimme das Lebesgue'sche Integral $\int_{[0,1]} f(x) d\lambda(x)$.

A 2 (3 Punkte)

Finde eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$, die gleichzeitig die folgenden Eigenschaften haben:

1. Für alle $x \in [0,1]$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$,
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int_0^1 f_n(x) d\lambda = 1$.

A 3 (4 Punkte)

Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{L}^1(X,\mu)$ eine Folge von Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion f konvergiert. Zeige, dass wenn $\mu(X) < \infty$ ist, dann ist $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. Gilt dies auch noch, wenn $\mu(X) = \infty$ ist?

A 4 (4 Punkte)

Entscheide, ob die folgenden Funktionen $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar sind und bestimme gegebenenfalls das Lebesgue'sche Integral $\int_E f(x) d\lambda(x)$.

1. (2 Punkte) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[1-\frac{1}{2^k}, 1-\frac{1}{2^{k+1}})}$, $E = [0,1)$,
2. (2 Punkte) $f(x) = [\frac{1}{x}]$, $E = (0,1]$, wobei $[a]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als a ist.

A 5 (5 Punkte)

Beweise den Satz 1.26 aus dem Skript.

A 6 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Massraum, $f : (X, \mathfrak{S}) \to \bar{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar und $c > 0$.

1. Zeige die sogenannte Tschebychevsche Ungleichung:

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int_X |f| d\mu.$$

2. Zeige: $\int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ fast überall.