Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Mai 2007

3. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 (Das Lebesgemaß von speziellen Mengen) (4 Punkte)

1. Bestimme das n-dimensionale Lebesguemaß der folgenden Mengen

$$(i)\ A_1 = \emptyset \quad (ii)\ A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \in (1,2)\}.$$

2. Beweise, dass $\mathbb{Q}$ und $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ Borelmengen sind. Bestimme das Lebesguemaß von $\mathbb{Q}$ und $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$.

A 2 (Binomialverteilung) (2 Punkte)
Sei $M = \{0,1,...,n\}$ und $0 < p < 1$. Für $k \in M$ sei

$$P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Beweise, dass es genau ein Maß μ auf $(M, \mathcal{P}(M))$ gibt mit $\mu(\{k\}) = P_k$. Bestimme $\mu(M)$.

A 3 (Dichte, offene Mengen von kleinem Maß). (3 Punkte)

(a) Da $\mathbb{Q}$ eine abzählbare unendliche Menge ist, gibt es eine Bijektion $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto q_n$. Zeige, dass

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n - 2^{-n},\ q_n + 2^{-n}) \ \neq\ \emptyset\,.$$

(b) Finde zu $\varepsilon > 0$ eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ vom Maß $\lambda(U) \leq \varepsilon$ derart, dass U in $\mathbb{R}$ dicht ist (also $U \cap V \neq \emptyset$ für jede nicht-leere offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}$).

A 4 (Translationsinvarianz des Lebesguemaßes) (5 Punkte)
Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die verschobene Menge $a + A := \{a + x \mid x \in A\}$.

1. Sei λ das Lebesguemaß in $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass λ translationsinvariant ist, das heißt

$$\lambda(a + A) = \lambda(A).$$

Hinweis: Zeige, dass $\mu(A) := \lambda(a + A)$ auch ein Maß ist. Verwende den Eindeutigkeitssatz für das Lebesguemaß.

2. Sei μ ein translationsinvariantes Maß in $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Beweise, dass $\mu = c\lambda$, wobei $c \geq 0$ und λ das Lebesguemaß ist.
Hinweise:
   - $c = \mu([0,1))$,
   - $[0,1) = \bigcup_{k=1}^n [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$.
   - $\mu([0, \frac{p}{q})) =?$.
   - Für $a < b \in \mathbb{R}$ approximiere $b - a$ durch eine fallende Folge rationaler Zahlen. $\mu([a,b)) =?$.

A 5 (Verteilungsfunktion) (3 Punkte)
Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so dass $\mu(a,b) < \infty$, falls $a < b$ reell sind. Weiter sei

$$F(x) := \begin{cases} \mu(0,x], & \text{falls } x > 0 \\ -\mu(x,0], & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass F genau dann stetig in x ist, wenn $\mu(x) = 0$ ist.