Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24. April 2007

1. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 Entscheide, ob die folgenden Teilmengen von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ auch σ-Algebren sind. Begründe jeweils Deine Antwort.

1. $\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ endlich oder } \mathbb{R} \setminus A \text{ endlich}\}$
2. $\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ abzählbar oder } \mathbb{R} \setminus A \text{ abzählbar}\}$
3. $\mathcal{S} = \{(a,b), [a,b], (a,b], [a,b) \mid a \leq b\}$

A 2 Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ eine abzählbare Familie mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Zeige: dann ist

$$\mathcal{S} := \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$$

eine σ-Algebra in $\mathbb{R}$.

A 3 Seien $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}$. Weiter sei $\mathcal{S}$ die kleinste σ-Algebra in X, die $\mathcal{A}$ enthält.

1. Bestimme $\mathcal{S}$. Ist $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$?
2. Entscheide, ob die Funktion $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, wobei

$$(i)\ f(x) = (x-3)^2, \qquad (ii)\ f(x) = \left| x - \frac{7}{2} \right|.$$

A 4 (7 Punkte)
Sei $X = (0, 1)$ und $\mathcal{A} = \{(0, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Sei $\mathcal{S}$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält.

1. Gehört $\left[\frac{1}{150}, \frac{1}{7}\right)$ zu $\mathcal{S}$?
2. Bestimme $\mathcal{S}$.
3. Entscheide, ob die Funktion $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ messbar ist.
4. Bestimme alle messbaren Funktionen $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

A 5 (4 Punkte)
Entscheide, ob die Funktion $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, wobei

$$(i)\ f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (ii)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{wenn } x = \frac{p}{q},\ \ q > 0,\ p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

A 6 (6 Punkte)
Beweise Lemma 1.3.
Ist denn auch die Vereinigung $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ zweier σ-Algebren $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ wieder eine σ-Algebra?