H 18

i)

1) $A^T y = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A^T_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A^T_{nj} y_j \end{pmatrix}$.

Für beliebiges $i = 1, \dots n$ gilt:

$$\sum_j A^T_{ij} y_j \geq \sum_j A^T_{ij} m(y) = m(y) \sum A^T_{ij} = m(y)$$ (1)

Ebenso:

$$M(y) = M(y) \sum_j A^T_{ij} = \sum_j A^T_{ij} M(y) \geq \sum_j A^T_{ij} y_j$$ (1)

2)

Im besten Fall gilt $M(A^T y) = (1-\varepsilon) M(y) + \varepsilon m(y)$
also im Allgemeinen $M(A^T y) \leq (1-\varepsilon) M(y) + \varepsilon m(y)$ (1)

Ebenso im schlechtesten Fall $m(A^T y) = \varepsilon M(y) + (1-\varepsilon) m(y)$
also im Allgemeinen $m(A^T y) \geq \varepsilon M(y) + (1-\varepsilon) m(y)$ (1)

$$\Rightarrow M(A^T y) - m(A^T y) = D(A^T y) \leq (1-\varepsilon)(M(y) - m(y)) + \varepsilon(M(y) - m(y)).$$
$$\leq (1-2\varepsilon) D(y).$$ (1)

ii)

Beachte: $D(e_k) = 1$.

$$\Rightarrow D(A^T e_k) \leq (1-2\varepsilon) D(e_k) = 1-2\varepsilon$$

$$\Rightarrow D((A^T)^m e_k) \leq (1-2\varepsilon) D((A^T)^{m-1} e_k) \leq \dots \leq (1-2\varepsilon)^m$$ (1)

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} D((A^T)^m e_k) = 0$$

$\Rightarrow$ Jede Komponente der k-ten Spalte von $(A^T)^m$ konvergiert gegen den selben Wert u_k . (1)

$\Rightarrow \lim_m (A^T)^m = \begin{pmatrix} u^T \\ \vdots \\ u^T \end{pmatrix}$, wobei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

In ~~jeder~~ ~~Zeile~~ „liegt" der Vektor u^T.

$\Rightarrow \lim_m (A^m)$: ~~statt~~ hier steht u nun in den Spalten

$\lim_m (A^m) = (u, \dots u). = P$ (1)

Ist u Wahrscheinlichkeitsvektor?

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \lim_m (A)^m e_k$$

$$= \lim \underbrace{\sum_{k=1}^n (A)^m e_k}_{=1}$$ (1)

$\Leftarrow$ A^m ist stochastische Matrix. d.h. Spaltensumme $= 1$

$= 1$.

iii) Sei $A^r > 0$, für $r \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} A^m = \lim_{m\to\infty} A^{m+r} = \lim_{m\to\infty} (A^r)^m = P$$ (1)

iv)

<u>$Au = u$:</u>

$$(Au)_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} u_k = \sum_k A_{ik} \lim_m A^m_{k,l}$$

$$= \lim_m \sum_k A_{ik} A^m_{k,l} = \lim_m \sum_k A^{m+1}_{i,l} = u_i$$ (1)

Sei w beliebiger W-Vektor.

$$\Rightarrow Pw = \begin{pmatrix} u_1 & u_1 & \dots & u_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_n & & u_n \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} \sum_i u_1 \cdot w_i \\ \vdots \\ \sum_i u_n \cdot w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \sum w_i \\ \vdots \\ u_n \sum w_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$ (1)

$\Rightarrow Pw = u$

Betrachte nun Aw

Aw ist ein w-Vektor

$$\Rightarrow PAw = u = APw = Au = u = Pw$$

$$\Rightarrow PA = AP = P$$ (1)

$$P^2 w = P \cdot u = u = Pw \Rightarrow P^2 = P$$ (1)

v)

(1) $Au = u \Rightarrow u$ EV zu EW $\lambda = 1$. (1)

<u>Eindeutigkeit:</u>

Annahme: $Av = v$, $v \neq u$

$$\Rightarrow (\lim_m A^m v)_i = \sum_j \lim A^m_{ij} v_j = \lim_m \sum_j A^m_{ij} v_j$$

$$= \lim_m (A^m v)_i = \lim_m (v)_i = v_i$$ (1)

$$\Rightarrow \lim_m A^m v = v$$

Andererseits:

$$(\lim_m A^m v)_i = (Pv)_i = (u)_i$$ (1)

$$\Rightarrow \lim A^m v = u \quad \lightning.$$

(2)

$$P = \lim_n A_n = (u, \dots u)$$

$$Px = \begin{pmatrix} u_1 \sum_i x_i \\ \vdots \\ u_n \sum x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$ (1)

(3) ~~Sei x~~

Sei $Ax = \mu x$, $\mu \neq 1$.

$\Rightarrow A^m x = \mu^m x \xrightarrow[m]{(2)} u$ ①

$\Rightarrow |\mu^m|$ konvergiert $\Rightarrow |\mu| < 1$.

$\Sigma_{H18} =$