H12

- Abgeschlossenheit:

Betrachte $P, P' \in \text{PerM}_n$. Sei $P = (P_1, \dots P_n)$ und $P' = (e_{i_1}, \dots e_{i_n})$, wobei $e_{i_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ - i_k Stelle.

Beachte $e_{i_1} \neq \dots \neq e_{i_n}$. (Das ich P' so wählen kann, sind grade die Bedingungen)

Außerdem $P \cdot e_{i_k} = P_{i_k}$,

d.h., e_{i_k} wählt die i_k-te Spalte von P und schreibt sie in die k-te Spalte.

1

$P \cdot (e_{i_1}, \dots e_{i_n}) = (P_{i_1}, P_{i_2}, \dots P_{i_n})$.

Da auch für P gilt: $P_1 \neq \dots \neq P_n$ und jedes P_j nur einen Eintrag ungleich null, nämlich einen gleich 1 besitzt, ist $P \cdot P'$ wieder eine Permutationsmatrix

$\Rightarrow P \cdot P' \in \text{PerM}_n$.

1

- Assoziativität:

✓ klar Matrixmultiplikation ist ass.

1

- Existenz einer Eins.

$1_{n \times n} \in \text{PerM}_n$

1

- Existenz einer Inversen.

$P \in \text{PerM}_n \Rightarrow$ linear unabhängige Spalten

$\Rightarrow$ voller Rang invertierbar.

? Liegt die Inverse in PerM_n?

Antwort: ja!

Betrachte dazu $P \in PerM_n$ und schreibe wie oben $P = (e_{i_1}, \dots e_{i_n})$.

Außerdem $P^t = \begin{pmatrix} e_{i_1}^t \\ \vdots \\ e_{i_n}^t \end{pmatrix}$.

D.h. in P^t steht in der k-te Zeile an der i_k-ten Stelle eine 1. (sonst nur Nullen).

$$\Rightarrow \quad P^t \cdot P^t = \begin{pmatrix} e_{i_1}^t e_{i_1} & \cdots & e_{i_n}^t e_{i_1} \\ \vdots & & \\ e_{i_n}^t \cdot e_{i_1} & & e_{i_n}^t \cdot e_{i_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1_{n \times n}.$$

2

$$P^{-1} = P^t$$

Zu iii)

Surjektivität von i.

Sei $P \in PerM_n$ und $P = (e_{i_1}, \dots e_{i_n})$ e_{i_k} wie oben.

wähle dann $\pi(1) = i_1, \dots \pi(n) = i_n$. ✓

1

ii) Sei $\pi \in S_n$.

$$M_\pi = \left(e_{\pi(1)}, \dots e_{\pi(n)}\right).$$

π ist injektiv $\Rightarrow \pi(1) \neq \dots \neq \pi(n)$.

Zeilensummen von M_π sind gleich 1.

Spaltensummen ist klar, da $e_{\pi(k)}$ Standardeinheitsvektor 1

$\Rightarrow M_\pi \in \operatorname{Per} M_n$

iii) ~~Sei $\pi_1 \neq \pi_2$,~~

Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ mit $\pi_1 \neq \pi_2$.

Annahme: $M_{\pi_1} = M_{\pi_2}$.

$$\Rightarrow \left(e_{\pi_1(1)}, \dots e_{\pi_1(n)}\right) = \left(e_{\pi_2(1)}, \dots, e_{\pi_2(n)}\right).$$

1

$\Rightarrow \pi_1 = \pi_2$ ↯.

also $M_{\pi_1} \neq M_{\pi_2}$.

iv)

• $i(id) = (e_1, e_2, \dots e_n) = \mathbb{1}$ ✓ 1

• Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_n$.

$$i(\pi_1) \cdot i(\pi_2) = \left(e_{\pi_1(1)}, \dots, e_{\pi_1(n)}\right) \cdot \left(e_{\pi_2(1)}, \dots e_{\pi_2(n)}\right).$$

Beachte wie zuvor:

$$\left(e_{\pi_1(1)}, \dots, e_{\pi_1(\pi_2(k))}, \dots e_{\pi_1(n)}\right) \cdot e_{\pi_2(k)}$$

Multiplikation mit $e_{\pi_2(k)}$ wählt die $\pi_2(k)$-te Spalte von $i(\pi_1)$ und schreibt sie an die k-Stelle, d.h. 1

$e_{\pi_1(\pi_2(k))} \longrightarrow k$-Stelle.

$\Rightarrow (e_{\pi_1(1)}, \dots, e_{\pi_1(n)}) \cdot (e_{\pi_2(1)}, \dots, e_{\pi_2(n)})$

$= (e_{\pi_1(\pi_2(1))}, \dots, e_{\pi_1(\pi_2(n))})$ 1

$= i(\pi_1 \cdot \pi_2)$

v) Sei $\pi \in S_n$

Betrachte M_π und seien $S_1, \dots, S_m$ Spaltennachbarvertauschungen,
sodaß $M_\pi = \mathbb{1}_{n \times n} S_1 \cdots S_m$ 1

$\Rightarrow \det M_\pi = \det(\mathbb{1}_{n\times n})(-1)^m$

Außerdem gilt für eine Permutation $\pi \in S_n$
$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^T$, wobei $\pi = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_T$, τ_i Transposition.
$T \hat{=}$ Anzahl der Transp. 1

Die Transpositionen entsprechen aber gerade den Spaltennachbarvertauschungen.

$\Rightarrow T = m$ 1

$\det M_\pi = \operatorname{sign}(\pi)$.

vi)

$$M_{\pi_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det M_{\pi_1} = -1$$ 1

$$M_{\pi_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det M_{\pi_2} = 1$$ 1

$\sum H_{12} = 17$