H08

Sei M die zu f gehörige Abbildungsmatrix bzgl. der Basis von A.

1.) Sei f volumenerhaltend, $\mathrm{vol}(P_{f(A)}) = \mathrm{vol}(P_A)$ 1

$$\mathrm{vol}(P_{f(A)}) = |\det f(A)| = |\det(M \cdot A)| = |\det M| \cdot |\det A| = |\det M| \cdot \mathrm{vol}(P_A)$$

2

$$= \mathrm{vol}(P_A)$$

$$\Leftrightarrow \det(M) = \pm 1.$$

2.) Sei $\det f = \pm 1$. 1

(1 + 1 sind für die jeweilige Richtung)

$\sum_{H08} = 4$

H09

i) sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$A A^t = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 1 , $\det A = 1 = ad-bc$

$$\Rightarrow \quad a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1, \quad ad-bc = 1$$ 2

$$ac+bd = 0$$

wähle $a = \cos\phi = d$, $b = -\sin\phi = -c$, $\phi \in \mathbb{R}$.

Alle vier Gleichungen sind erfüllt ($\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1!$). 1

Ohne $\det A = 1$, wäre noch die Wahl eines Vorzeichens frei gewesen, z.B. $a = -\cos\phi$, $b = \sin\phi$.

~~$\sum_{H08} = 4$~~

ii) wähle Standardbasis e_1, e_2.

- winkelerhaltend

~~A~~ Wenn A ~~den~~ Winkel zwischen ~~den~~ e_1 und e_2 erhält, ist A winkelerhaltend. (1)

$$\sphericalangle(e_1,e_1) = \sphericalangle(e_2,e_2) = 1 = \langle e_1,e_1\rangle = \langle e_2,e_2\rangle$$

$$\sphericalangle(e_1,e_2) = \langle e_1,e_2\rangle = 0$$

$$\sphericalangle\left(\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}\right) = -\cos\phi\sin\phi + \cos\phi\sin\phi = 0 = \sphericalangle(e_1,e_2)$$

$$\sphericalangle\left(\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}\right) = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 = \sphericalangle(e_1,e_1)$$

$$\sphericalangle\left(\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}\right) = \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 = \sphericalangle(e_2,e_2).$$ (1)

- längenerhaltend

wenn A die Längen ~~der~~ von e_1 und e_2 erhält, ist A längenerhaltend (1)

$$\|e_1\| = 1, \quad \|e_2\| = 1$$

$$\left\|\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}\right\rangle} = 1$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}\right\| = \quad = 1$$ (1)

- volumenerhaltend

$$\det A = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \Rightarrow$$ (1) A ist volumenerhaltend

H08

$\Sigma_{H09} = 9$