# Höhere Mathematik II (EGIPS) – SS '99 – Blatt 8 – Aufgabe 6

*Für eine einheitliche Beschreibung des elektromagnetischen Feldes führt man als sogenannten „elektromagnetischen Feldtensor" die Matrix*

$$F := \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

*ein. Dabei sind $E_x, E_y, E_z$ die Komponenten des elektromagnetischen und $B_x, B_y, B_z$ die Komponenten des magnetischen Feldes.*

**a)** *Sei $c$ die Lichtgeschwindigkeit, $|v| < c$ und $\beta := v/c, \gamma := 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und*

$$\Lambda_\beta := \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

*Berechnen Sie $\Lambda_\beta^{-1}$ und zeigen Sie, daß $\{\Lambda_\beta : \beta \in ]-1,1[\}$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bildet.*

Da in der Mitte von

$$\Lambda_\beta := \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

nur eine $2\times 2$-Einheitsmatrix steht, bleiben die mittleren zwei Spalten bzw. Zeilen von $\Lambda_\beta$ bei Multiplikation mit Matrizen gleichen Aussehens unverändert stehen. Es genügt daher, im Folgenden statt $\Lambda_\beta$ die Matrix

$$\tilde{\Lambda}_\beta := \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

zu untersuchen.

Wir zeigen zunächst, daß $\{\tilde{\Lambda}_\beta : \beta \in ]-1,1[\}$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bildet:

i) Abgeschlossenheit:
Seien $\beta_1, \beta_2 \in ]-1,1[$ und $\gamma_1 := 1/\sqrt{1-\beta_1^2}, \gamma_2 := 1/\sqrt{1-\beta_2^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\beta_1} \cdot \tilde{\Lambda}_{\beta_2} &= \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 \\ -\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 & -\beta_1\gamma_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\gamma_2 \\ -\beta_1\gamma_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\gamma_2 & \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit die Abgeschlossenheit gelten kann, müßte oben links und unten rechts wieder ein Objekt der Form $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ stehen. Wir versuchen einfach 'mal, ob das funktioniert und setzen daher

$$\gamma := \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 = (\beta_1\beta_2 + 1)\gamma_1\gamma_2$$



Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\beta_1} \cdot \tilde{\Lambda}_{\beta_2} = &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_1\gamma_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\gamma_2 \\ -\beta_1\gamma_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\gamma_2 & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\gamma \\ -\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt

$$\beta := \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \in ]-1,1[$$

gesetzt haben. Wenn das nun alles stimmt, so müßte gelten:

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

Schau 'mer mal:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2}{(1+\beta_1\beta_2)^2}}} \\ &= \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1+\beta_1\beta_2)^2-(\beta_1+\beta_2)^2}} \\ &= (1+\beta_1\beta_2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2\beta_1\beta_2+\beta_1^2\beta_2^2-\beta_1^2-2\beta_1\beta_2-\beta_2^2}} \\ &= (1+\beta_1\beta_2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\beta_1^2\beta_2^2-\beta_1^2-\beta_2^2}} \\ &= (1+\beta_1\beta_2)\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}} \\ &= (1+\beta_1\beta_2)\gamma_1\gamma_2. \end{aligned}$$

Da die letzte Identität genau die Definition von $\gamma$ ist, stimmt alles, und die Abgeschlossenheit ist gezeigt. Es gilt also:

$$\tilde{\Lambda}_{\beta_1} \cdot \tilde{\Lambda}_{\beta_2} = \tilde{\Lambda}_{\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}}.$$

iii) Neutrales Element:
Das neutrale Element der Matrizenmultiplikation ist die Einheitsmatrix. Sie ist Element der zu untersuchenden Menge, wenn man $\beta = 0$ setzt ($\Rightarrow \gamma = 1$):

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda}_0.$$

ii) Inverses Element:
Das inverse Element zu $\tilde{\Lambda}_\beta$ ist $\tilde{\Lambda}_{-\beta}$ wegen:

$$\tilde{\Lambda}_\beta \cdot \tilde{\Lambda}_\beta^{-1} = \tilde{\Lambda}_\beta \cdot \tilde{\Lambda}_{-\beta} = \tilde{\Lambda}_{\frac{\beta-\beta}{1-\beta^2}} = \tilde{\Lambda}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv) Assoziativität:
klar wegen Assoziativität der Matrizenmultiplikation.

Alle Aussagen gelten natürlich auch wieder für $\Lambda_\beta$. Insbesondere ist $\Lambda_\beta^{-1} = \Lambda_{-\beta}$.

**b)** *$\Lambda_\beta$ ist die Matrix einer Lorentz-Transformation eines Kooridinatensystems, das sich mit der Geschwindigkeit $v$ in $z$-Richtung bewegt. Der elektromagnetische Feldtensor transformiert sich unter dieser Lorentz-Transformation gemäß $F \mapsto \Lambda_\beta^{-1} F \Lambda_\beta$. Zeigen Sie, daß auch $\Lambda_\beta^{-1} F \Lambda_\beta$ wieder von derselben Form wie $F$ ist, das heißt, daß sich auch die Matrixelemente des transformierten Feldtensors wieder als Komponenten eines elektromagnetischen Feldes interpretieren lassen. Zeigen Sie, daß unter der Transformation aus einem rein elektrischen (bzw. magnetischen) Feld ein allgemeines elektromagnetisches Feld wird, und zeigen Sie weiter, daß Felder, deren $z$-Komponente verschwinden, unter der Lorentz-Transformation wieder in solche Felder transformiert werden.*

Die Lorentz-Transformation erhält die Gestalt von $F$:

$$\begin{aligned}
F \mapsto \Lambda_\beta^{-1} F \Lambda_\beta = \Lambda_{-\beta} F \Lambda_\beta
&= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta\gamma E_z & \gamma E_x + \beta\gamma B_y & \gamma E_y - \beta\gamma B_x & \gamma E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \gamma E_z & \beta\gamma E_x + \gamma B_y & \beta\gamma E_y - \gamma B_x & \beta\gamma E_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \gamma E_x + \beta\gamma B_y & \gamma E_y - \beta\gamma B_x & (1-\beta^2)\gamma^2 E_z \\ \gamma E_x + \beta\gamma B_y & 0 & B_z & -\beta\gamma E_x - \gamma B_y \\ \gamma E_y - \beta\gamma B_x & -B_z & 0 & -\beta\gamma E_y + \gamma B_x \\ (1-\beta^2)\gamma^2 E_z & \beta\gamma E_x + \gamma B_y & \beta\gamma E_y - \gamma B_x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \gamma E_x + \beta\gamma B_y & \gamma E_y - \beta\gamma B_x & E_z \\ \gamma E_x + \beta\gamma B_y & 0 & B_z & -\beta\gamma E_x - \gamma B_y \\ \gamma E_y - \beta\gamma B_x & -B_z & 0 & -\beta\gamma E_y + \gamma B_x \\ E_z & \beta\gamma E_x + \gamma B_y & \beta\gamma E_y - \gamma B_x & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile $(1-\beta^2)\gamma^2 = 1$ verwendet wurde.

Für ein rein elektrisches Feld ($B_x = B_y = B_z = 0$) ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & 0 & 0 \\ E_y & 0 & 0 & 0 \\ E_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \gamma E_x & \gamma E_y & E_z \\ \gamma E_x & 0 & 0 & -\beta\gamma E_x \\ \gamma E_y & 0 & 0 & -\beta\gamma E_y \\ E_z & \beta\gamma E_x & \beta\gamma E_y & 0 \end{pmatrix}.$$



Für ein rein magnetisches Feld ($E_x = E_y = E_z = 0$) ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & -B_y \\ 0 & -B_z & 0 & B_x \\ 0 & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \beta\gamma B_y & -\beta\gamma B_x & 0 \\ \beta\gamma B_y & 0 & B_z & -\gamma B_y \\ -\beta\gamma B_x & -B_z & 0 & \gamma B_x \\ 0 & \gamma B_y & -\gamma B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Für ein Feld mit $E_z = B_z = 0$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & 0 \\ E_x & 0 & 0 & -B_y \\ E_y & 0 & 0 & B_x \\ 0 & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \gamma E_x + \beta\gamma B_y & \gamma E_y - \beta\gamma B_x & 0 \\ \gamma E_x + \beta\gamma B_y & 0 & 0 & -\beta\gamma E_x - \gamma B_y \\ \gamma E_y - \beta\gamma B_x & 0 & 0 & -\beta\gamma E_y + \gamma B_x \\ 0 & \beta\gamma E_x + \gamma B_y & \beta\gamma E_y - \gamma B_x & 0 \end{pmatrix}.$$