G26

1) 1.) Sei $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1,-1\}$

$\Rightarrow A\bar{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \bar{\lambda} \cdot \bar{x}$

$\Rightarrow \bar{x}$ EV zu EW $\bar{\lambda}$

2.) Sei $\bar{x} = cx$:

$\Rightarrow A\bar{x} = Acx = \lambda cx = \lambda \bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1$

ii) Sei $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1,-1\}$ EW von A zum EV x.

$\Rightarrow \bar{\lambda}$ EW von A zu EV $\bar{x}$.

(x und $\bar{x}$ sind linear unabhängig)

$aV(A) \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$

Sei $\lambda_1 = \pm 1$ EW von A zum EV x.
Es kann nur einen weiteren EW geben.

$\Rightarrow \lambda_2 = \pm 1$.

$\Rightarrow \sigma(A) \in \{1,-1\}$.

also entweder $\sigma(A) = \{1\}$, $\sigma(A) = \{-1\}$, $\sigma(A) = \{1,-1\}$.
Die ersten beiden fallen in die Kategorie $\sigma(A) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$, letztere erfüllt $\sigma(A) = \{1,-1\}$.

(Bemerke: die Menge der orthogonalen Matrizen mit solchem Spektrum ist nicht leer $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?)

$\Rightarrow$ Entweder $\sigma(A) = \{1,-1\}$ oder $\sigma(A) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$.

iii) **Fall $\sigma(A) = \{1, -1\}$:**

Sei x_1 EV zu EW $\lambda_1 = 1$ und x_2 EV zu EW $\lambda_2 = -1$.

Beachte:

$A x_{1/2} = A(\mathrm{Re}(x_{1/2}) + i\,\mathrm{Im}(x_{1/2})) = \lambda_{1/2}\,\mathrm{Re}(x_{1/2}) + i\lambda_{1/2}\,\mathrm{Im}(x_{1/2})$.

Hier geht ein, daß für $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ $v_1 = \mathrm{Re}(x_1)$ und $v_2 = \mathrm{Re}(x_2)$ sind reelle EVn. zu λ_1 und λ_2.

Ist $\mathrm{Re}(x_{1/2}) = 0$ wähle $v_{1/2} = \mathrm{Im}(x_{1/2})$.

Fall $\sigma(A) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$, $\lambda \in \mathbb{T}$:

Sei x EV zu EW λ $\Rightarrow$ $\bar{x}$ EV zu EW $\bar{\lambda}$.

Setze $v_1 = \frac{1}{2}(x + \bar{x})$ und $v_2 = \frac{1}{2i}(x - \bar{x})$.

$\Rightarrow$

$$A v_1 = \tfrac{1}{2}(\lambda x + \bar{\lambda}\bar{x}) = \tfrac{1}{2}(e^{i\varphi}x + e^{-i\varphi}\bar{x}) \quad ; \lambda = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}.$$

$$= \tfrac{1}{2}(\cos\varphi\, x + i\sin\varphi\, x + \cos\varphi\,\bar{x} - i\sin\varphi\,\bar{x})$$

$$= \tfrac{1}{2}(\cos\varphi(x + \bar{x}) + i\sin\varphi(x - \bar{x}))$$

$$= \cos\varphi\, v_1 + \tfrac{1}{2}i\sin\varphi\, x - \bar{x} = \cos\varphi\, v_1 - \sin\varphi\, v_2.$$

$$A v_2 = \tfrac{1}{2i}(\lambda x - \bar{\lambda}\bar{x})$$

$$= \tfrac{1}{2i}(e^{i\varphi}x - e^{-i\varphi}\bar{x}) = \frac{1}{2i}((\cos\varphi(x - \bar{x}) + i\sin\varphi(x + \bar{x}))$$

$$= \cos\varphi\, v_2 + \sin\varphi\, v_1.$$

$\Rightarrow$ A bzgl. der Basis (v_1, v_2) : $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

iv) Angenommen es gäbe ein $A \in M_3$ mit $\sigma(A) \subseteq \mathbb{T} \setminus \{1,-1\}$.

$\Rightarrow \exists$ EV, x_1 und x_2 linear unabhängig.

$\Rightarrow$ $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ sind ebenfalls EV zu konjugierten EW.
und ebenfalls linear unabhängig.

$\lightning$.

$\ulcorner$ Bem: Die Menge der orthogonalen Matrizen mit $\pm 1 \in \sigma(A)$
ist nichtleer: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\perp$