G15

A: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{7}) \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -4+\sqrt{7}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{7}) \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -4-\sqrt{7}$ $\Rightarrow D_A = \begin{pmatrix} -4+\sqrt{7} & 0 \\ 0 & -4-\sqrt{7} \end{pmatrix}$

B: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{2/3} = -2$ $\Rightarrow D_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

C: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_{2/3} = -2$ $\Rightarrow$ C ist nicht diagonalisierbar

G16

i) Linearität von D ist klar, siehe Analysis

Problem ist allerdings, ob $D(\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)) \in V$.

Ist erfüllt, da $D(e^x \cos(x)) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x)$

$D(e^x \sin(x)) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$.

$D(f_1(x)) = f_1(x) - f_2(x)$

$D(f_2(x)) = f_1(x) + f_2(x)$

$\Rightarrow M_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(M_D - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)^2 + 1$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm i$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -i f_1(x) + f_2(x)$

$v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i f_1(x) + f_2(x)$

ii) Linearität von D ist klar

Problem: $f \in U \Rightarrow Df \in U$?

Sei $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, e^{i n_j x}$,

$$\Rightarrow \quad D f(x) = \sum_{j=1}^{n} i \lambda_j n_j \, e^{i n_j x} \quad \in U$$

<u>Eigenvektoren:</u>

$$D f_n = i n \, e^{i n x} = i n \, f_n \, .$$

(Hier folgt insbesondere, daß die f_n linear unabhängig sind

$\Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ist eine Basis)

<u>EV sind linear unabh.</u>
für <u>verschiedene EW</u> .

$$M_D = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & 3i & & & & & \\ & & 2i & & & & \\ & & & i & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & -i & & \\ & & & & & & -2i & \\ & & & & & & & -3i \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} , \quad \sigma(D) = i\,\mathbb{Z} \, .$$

iii) Betrachte $f(x) = e^{kx}$, $k \in \mathbb{C}$.

$$D f(x) = k \, e^{kx} \quad \Rightarrow \quad \sigma(D) = \mathbb{C} \, .$$