G09

i)

- Abgeschlossenheit:

$A, B \in SL(n, \mathbb{K}) \Rightarrow \det A = \det B = 1.$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$ ✓

- Assoziativität:

– klar, Matrix mult. ist assoz.

- Einselement e:

$\det(\mathbb{1}_{n \times n}) = 1 \Rightarrow e \in SL(n, \mathbb{K})$

- Inverses:

$\det(A) = 1 \Rightarrow A$ ist invertierbar.

Inverse $A^{-1} \in M_{n \times n}$

Frage liegt A^{-1} in $SL(n, \mathbb{K})$.

Ja, denn $\det(\mathbb{1}) = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A) = \det(A^{-1}) = 1.$

ii)

- Abgeschlossenheit:

A, B obere Dreiecksmatrix.

$A \cdot B = C$, $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = 0$ für $i > j$, da

1. Fall: $i > k \Rightarrow \underbrace{a_{ik}}_{=0} b_{kj} = 0$

2. Fall: $k > j \Rightarrow a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{=0} = 0$

- Assoziativität.

– klar, Matrix mult. ist assoz.

- Einselement e:

$e := \mathbb{1}_{n \times n}$ ✓

- Inverses: Verwende z.B. Invertierungsverfahren aus G03.

$\rightarrow$ klar ✓

G09

(iii)

Abgeschlossenheit der Multiplikation:

$a,b,c,d,a',b',c',d' \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} =: P$$

- alle Einträge sind wieder in $\mathbb{Z}$, ($\mathbb{Z}$ ist ~~addi~~ ~~multiplikative~~ additive Gruppe.)

$$\det P = (aa'+bc')(cb'+dd') - (ca'+dc')(ab'+bd')$$

$$= aca'b' + ada'd' + bcb'c' + bdc'd'$$
$$-(aca'b' + bca'd' + adb'c' + bdc'd')$$

$$= ad(a'd'-b'c') - bc(a'd'-b'c')$$
$$+ a \cdot ca'b' - aca'b' + bcb'c' - bcb'c'$$

$$= 1.$$

Assoziativität: ✓ klar.

- Einselement

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$

- Inverse:

$$A \in SL(2,\mathbb{Z}) \Rightarrow \det A = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \underline{\in SL(2,\mathbb{Z})}$$