603

i) rang $A = n \Rightarrow A$ invertierbar

Gaußsches Eliminationsverfahren $\Rightarrow$ A durch Z-Umformung in Zeilenstufenform $\bar{A}$.

Jetzt durch Zeilenumformungen $\bar{A}$ von unten nach oben schrittweise in Diagonalgestalt bringen.

Bemerkung: rang $A = n \Rightarrow$ rang $\bar{A} = n$

$\Rightarrow$ alle Diagonalelemente von $\bar{A}$, $\bar{a}_{ii} \neq 0$.

Durch Multiplikation der jeweiligen Zeile mit dem Kehrwert ihres Diagonalelements $\frac{1}{\bar{a}_{ii}}$ erhält man die Einheitsmatrix.

ii) Es seien Z die Zeilenumformungen, sodaß $Z \cdot A = \mathbb{1}$.

$$\Rightarrow \quad Z \cdot \mathbb{1} = Z(A \cdot A^{-1}) = (ZA) \cdot A^{-1} = \mathbb{1} \cdot A^{-1}.$$

Bemerkung: Wegen rang $A = n$ und i) läßt sich A überhaupt nur in die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ überführen.

iv)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_1+Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1/3\, Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{2\cdot Z_1 - Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_1 - Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_2 - Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_3 - Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$