Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2007
19.07.2007

Lineare Algebra II für Physiker

7. Übungsblatt

Hinweis: Am 06.08.07 findet 9:00-11:00 Uhr in S311/012 eine Probeklausur statt. Eine elektronische Anmeldung wird es spätestens Anfang nächster Woche auf der Internetseite geben.

Gruppenübung

G23 (Wahr oder falsch?)

i) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ verschiedene Eigenwerte einer selbstadjungierten linearen Abbildung und $v_1, \ldots, v_n$ die zugehörigen Eigenvektoren. Dann gilt für $i \neq j$:
a) $\lambda_i \perp \lambda_j$ b) $v_i \perp v_j$ c) $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$

ii) Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{C}$.
a) $\sigma(AA^*) \subset \mathbb{R}_+$ b) $\sigma(AA^*) \cap i\mathbb{R} \neq \{\emptyset\}$ c) $\sigma(AA^*) \subset \mathbb{R}$

iii) Das Produkt zweier symmetrischer Matrizen ist:
a) normal b) selbstadjungiert c) symmetrisch d) unitär

G24 (Kegelschnitte)
Sei A eine reelle selbstadjungierte 2×2-Matrix und sei $b \in \mathbb{R}^2$. Diskutiere die Kurven, die durch $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle = 1\}$gegeben sind.
Gehe dazu folgendermaßen vor: Seien λ_1, λ_2 Eigenwerte von A und seien b_1, b_2 die Komponenten von b in einer ONB aus EV. Dann entstehen verschiedene Kurven (z.B. Hyperbeln, Ellipsen,...), je nachdem, ob $\lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2$ positiv, negativ oder gleich Null sind (alle Komponenten sind möglich). Stelle eine vollständige Klassifikation der möglichen Fälle auf, d.h., gib für jede Kombination den Typ der zugehörigen Kurve an! Skizziere die Kurven in einem Koordinatensystem.

G25 (Selbstadjungierte Abbildungen)
In der Vorlesung wurde nachfolgender Satz bis auf die Folgerung c)$\Rightarrow$ a) bewiesen. Zeige c) $\Rightarrow$ a).

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Für $T : V \to V$ sind äquivalent:

a) T ist selbstadjungiert
b) T ist normal und $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$
c) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall x$.

G26 (Orthogonale Matrizen)
Sei $A \in M_2$ eine orthogonale Matrix. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass A sich über $\mathbb{C}$ auf Diagonalform D_A bringen läßt und $\sigma(A) \subset \mathbb{T} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

i) Sei x EV zum EW λ. Zeige erstens, dass

$$\lambda \in \mathbb{T}\backslash\{1, -1\} \quad \Rightarrow \quad \overline{x} \text{ EV zum EW } \overline{\lambda}$$

(und damit x insbesondere linear unabhängig von $\overline{x}$). Zweitens, dass

$$\overline{x} = cx \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \{1, -1\}.$$

ii) Zeige, dass entweder $\sigma(A) = \{1, -1\}$ oder $\sigma(A) = \{\lambda, \overline{\lambda}\}$ für ein $\lambda \in \mathbb{T}$.

iii) Konstruiere eine reelle Basis bezüglich der A entweder diagonal oder von der Form $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, $\phi \in \mathbb{R}$ ist.

iv) Sei $A \in M_3$ eine orthogonale Matrix. Zeige, dass für mindestens einen Eigenwert λ von A gilt: $\lambda \in \{1, -1\}$.

S2 (Zum Spaß)
Bei jedem Fußballspiel, in dem nur ein Ball benutzt wird, gibt es mindestens zwei Punkte auf der Oberfläche des Balles, die sich zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit (wenn der Ball genau auf dem Anstoßpunkt liegt) an der gleichen Stelle befinden.

Wir freuen uns über Eure gute und unkomplizierte Mitarbeit in den vergangenen zwei Semestern und wünschen euch weiterhin viel Erfolg!