Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
05.07.2007

Lineare Algebra II für Physiker

6. Übungsblatt

Gruppenübung

G19 (Wahr oder falsch?)

i) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

   a) Es gibt mindestens einen Eigenwert mit mindestens einem Eigenvektor.
   b) Es gibt mindestens einen Eigenvektor.
   c) Es gibt mindestens einen Eigenwert.
   d) f ist diagonalisierbar.

ii) Sei U ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei $g: U \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

   a) Es gibt mindestens einen Eigenwert mit mindestens einem Eigenvektor.
   b) Es gibt mindestens einen Eigenvektor.
   c) Es gibt mindestens einen Eigenwert.
   d) g ist diagonalisierbar.

G20 (Fluoreszens)
Wir betrachen ein Atom mit drei Energieniveaus E_1, E_2 und E_3. Durch monochromatisches Licht lasse sic das Atom zu einem Übergang von Niveau 1 nach Niveau 3 angeregen: $a > 0$ sei die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs $1 \to 3$ pro Zeiteinheit. Der angeregte Zustand zerfällt über ein Niveau 2 wieder in den Grundzustand und sendet dabei (je nach Übergang) drei Spektrallinien mit den Frequenzen $\nu_{31} = \frac{1}{h}(E_3 - E_1)$, $\nu_{32} = \frac{1}{h}(E_3 - E_2)$, $\nu_{21} = \frac{1}{h}(E_2 - E_1)$ aus (h sei das Planksche Wirkungsquantum). Es sei $b > 0$ die Wahrscheinlichkeit des Übergangs $3 \to 2$, $c > 0$ die Wahrscheinlichkeit des Übergangs $3 \to 1$, $d > 0$ die Wahrscheinlichkeit des Übergangs $2 \to 1$. Die Übergangsmatrix des Prozesses ist also

$$\begin{pmatrix} 1-a & 0 & c \\ 0 & 1-b & d \\ a & b & 1-c-d \end{pmatrix}$$

Einverstanden? Konvergieren die Anregungswahrscheinlichkeiten bei konstanter Einstrahlung w_1, w_2, w_3 gegen ein Gleichgewicht? Ist (w_1, w_2, w_3) die Wahrscheinlichkeitsverteilung der drei Atomniveaus, so ergibt sich der Intensitätsanteil der Spektrallinien zu $I_{32} = bw_3$, $I_{31} = cw_3$, $I_{21} = dw_2$ Berechne die sich im Gleichgewicht einstellenden Intensitätsverhältnisse der Spektrallinien, $I_{31}/I_{32}, I_{31}/I_{21}, I_{32}/I_{21}$.

G21 (Diagonalisieren)

Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren und diagonalisiere: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

G21 (Adjunktion)
Prüfe folgende Eigenschaften der Adjunktion nach:

$$(\alpha S)^* = \overline{\alpha} S^*, \quad (ST)^* = T^* S^*, \quad \ker T = (\mathrm{Bild}(T^*))^\perp, \quad \lambda \in \sigma(T) \ \Leftrightarrow\ \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)\ .$$

Hausübungen

H19 (Seitenbewertung bei Google)

Der Umgang mit Internet-Suchmaschinen wie Google ist mittlerweile für die meisten Menschen Alltag. Dass hinter der Rangfolge in der Suchausgabe ein System stecken muß, ist sicherlich auch einigen klar. Aber, dass dieses System im wesentlichen auf Linearer Algebra beruht, wissen nur wenige. Der ursprüngliche Algorithmus wurde von Lawrence Page und Sergey Brin erdacht und besitzt zwei leicht unterschiedliche Versionen. Eine werden wir in dieser Aufgabe kennenlernen. In dieser Version stellt man sich einen Websurfer vor, der sich, zufällig den Verlinkungen, folgend durch die Seiten "klickt". Wir nehmen an, dass der Surfer sich in jeder Sekunde von Neuem entscheidet, ob er

a) über einen Link eine neue Seite besuchen möchte oder

b) wieder eine beliebige Seite wählt.

Die Wahrscheinlichkeit einen Link bzw. eine Seite zu wählen, soll stets von der Anzahl der möglichen Links (Seiten)abhängen und nicht von dem Link (der Seite) selbst. Je öfter er in diesem Verlauf eine bestimmte Seite besucht, desto höher ist ihre Bewertung.

Genauer: Angenommen wir wollen n verlinkte Seiten $s_1, \ldots, s_n$ bewerten. Zu Beginn ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Surfer die Seite s_i wählt:

$$p_0(s_i) = \frac{1}{n},$$

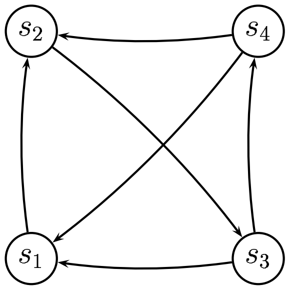
d.h. die Seiten werden mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ausgewählt. Die Anzahl der Links einer Seite s_i bezeichen wir mit $L(s_i)$. Im nächsten Schritt klickt er a) mit Wahrscheinlichkeit d weiter und entscheidet sich dazu für einen der gleichwahrscheinlichen $L(s_i)$ Links oder er springt b) (natürlich mit Wahrscheinlichtkeit $1-d$) keinem Link folgend wie zu Beginn auf eine beliebige der n Seiten. So verfährt er ab dann auch weiterhin für alle Zeiten $t > 0$. Die Wahrscheinlichkeit $p_{t+1}(s_i)$, dass er sich zum Zeitpunkt $t+1$ auf der Seite s_i befindet, lässt sich iterativ aus den Aufenhaltswahrscheinlichkeiten $p_t(s_j)$ zum Zeitpunkt t bestimmen:

$$p_{t+1}(s_i) = \frac{1-d}{n} + d \sum_{s_j \in M(s_i)} \frac{p_t(s_j)}{L(s_j)} \quad = \frac{1-d}{n} \sum_{j=1}^{n} p_t(s_j) + d \sum_{s_j \in M(s_i)} \frac{p_t(s_j)}{L(s_j)}\ , \qquad (*)$$

wobei $M(s_i)$ die Menge aller Seiten ist, die einen Link zur Seite s_i besitzen, und $0 < d < 1$. Für d wird häufig der empirische Wert $d = 0.85$ gewählt.

i) Stelle die zu $(*)$ gehörige Übergangsmatrix Matrix T auf und zeige, dass T eine stochastische Matrix ist. Finde eine Zerlegung von T in zwei stochastische Matrizen T_1 und T_2, sodass $T = (1-d)T_1 + dT_2$. Welche Bedeutung haben T_1 und T_2?

ii) Zeige , dass T stets eine(strikt) positive Matrix ist.



In H18 haben wir gelernt, dass für eine positive stochastische Matrix T der Grenzwert $P := \lim_{n\to\infty} T^n$ und ein Eigenvektor p_∞ mit $Tp_\infty = p_\infty$ existieren, sodass $Pw = p_\infty$ für alle Wahrscheinlichkeitsvektoren w. Das bedeutet, dass die gesuchten "Besuchsfrequenzen" $p_\infty(s_i)$ für einen Websurfer mit positiver Matrix T über die Lösung des Eigenwertproblems $Tp_\infty = p_\infty$ bestimmt werden können.

iii) Bestimme für die obige Webstruktur (aus den Anfangszeiten !) und $d = 0,85$ die Matrix T und berechne den Wahrscheinlichkeitseigenvektor p_∞ zum Eigenwert 1. Gib die Bewertungsrangfolge der Internetseiten $s_1, \dots, s_4$ an.

H20 (Teilchen im Kasten)
Sei $f_n : [0, 2\pi[\to \mathbb{C}, f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Betrachte $U := LH\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$.

i) Für $f, g \in U$ definieren wir:

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Zeige, dass

$$\langle \cdot, \cdot\rangle : U \times U \to \mathbb{C}$$

ein Skalarprodukt ist.

ii) Zeige, dass die f_n bezüglich des Skalarprodukts aus i) eine Orthonormalbasis bilden.

iii) Sei $\triangle := \frac{d^2}{dx^2}$ der ein-dimensionale Laplaceoperator. Zeige, dass $\triangle$ eine lineare Abbildung von U nach U ist, d.h. hier insbesondere, $\triangle(U) \subseteq U$. Bestimme dann Eigenwerte und Eigenvektoren und diagonalisiere $\triangle$.

iv) Betrachten wir ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen (unendlich-hohen) Kasten $[0, 2\pi]$. Die Materieverteilung des Teilchens erfüllt folgende Differentialgleichung mit Randbedingungen $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 0$:

$$\triangle f = -k^2 f, \text{ mit } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2},$$

wobei E die Energie des Teilchens ist und a priori kontinuierliche Werte annehmen kann. Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung. Jede dieser Lösung besitzt eine bestimmte Energie E, welche Energien sind überhaupt nur möglich?