Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
21.06.2007

Lineare Algebra II für Physiker

5. Übungsblatt

Gruppenübung

G10 (Testfragen)
Wahr oder falsch?

i) Eine $n \times n$-Matrix kann nicht mehr als n verschiedene Eigenwerte haben.
ii) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind
   a) orthogonal zueinander;
   b) linear unabhängig;
   c) eine Basis des Bildes der zugehörigen Abbildung.
iii) Eine $n \times n$-Matrix A über einem Körper $\mathbb{K}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn
   a) A n verschiedene Eigenwerte hat;
   b) A nur einen Eigenwert λ hat und dessen geometrische Vielfachheit n ist;
   c) es in $\mathbb{K}^n$ eine Basis von Eigenvektoren von A gibt.

G15 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren und diagonalisiere (falls möglich):

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

G16 (Eigenwerte und Eigenfunktionen)

i) Sei V der zweidimensionale Vektorraum über $\mathbb{C}$, der von den beiden Funktionen $f_1(x) := e^x \cos(x)$ und $f_2(x) := e^x \sin(x)$ aufgespannt wird. Zeige, dass die Ableitung D eine lineare Abbildung von V nach V ist. Stelle die Matrix von D bezüglich der Basis (f_1, f_2) auf und berechne die Eigenwerte von D. Gib die Eigenvektoren (eigentlich Eigenfunktionen) von D an!
ii) Betrachte $U := LH\{f_n(x) = e^{inx} : \ n \in \mathbb{Z}\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$. Zeige, dass die Ableitung D eine lineare Abbildung von U nach U ist. Stelle die Matrix von D bezüglich der Basis $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ auf und berechne die Eigenwerte von D. Gib die Eigenvektoren von D an! Warum ist "klar", dass $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Basis, d.h. hier, die f_n linear unabhängig sind?
iii) Sei $C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller komplexwertigen unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, und sei $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ der Ableitungsoperator. Berechne das Spektrum $\sigma(D)$ (d.h. die Menge aller Eigenwerte von D).

G17 (Simultanes Diagonalisieren)
Seien A und B $n \times n$-Matrizen und $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von gemeinsamen Eigenvektoren von A und B. Zeige, dass dann gilt:

$$AB = BA.$$

Vergleiche mit **G13**.

G18 (Funktionen von Matrizen)
Ist A eine $n \times n$-Matrix und ist p ein Polynom in x, d.h. $p(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k x^k$, so versteht man unter $p(A)$ die Matrix $p(A) := \sum_{k=1}^m \alpha_k A^k$. Sei nun A eine diagonalisierbare Matrix, d.h. es existiere eine invertierbare Matrix S , sodass $S^{-1}AS$ Diagonalform hat.

i) Zeige, dass $S^{-1}p(A)S = p(S^{-1}AS)$ bzw. $p(A) = Sp(S^{-1}AS)S^{-1}$ gilt.

ii) Zeige: Eine Zahl $\gamma \in \mathbb{C}$ ist genau dann Eigenwert von $p(A)$, wenn es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gibt, sodass $\gamma = p(\lambda)$ gilt (dafür schreibt man kurz $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$).

S1 (Zur Bedeutung der Diagonalisierbarkeit in der Politik)
Entwerfe einen Leserbrief!

DONNERSTAG, 14. JUNI 2007

ECHO-ECK

Die Quadratwurzel

VON PAUL-HERMANN GRUNER

Die Kaczynskis. Das ist kein Filmtitel. Obwohl es schön wäre, weil man dann nach dem bösartigen Streifen aus dem Kino ginge, alles abstreifen und frei durchatmen könnte. Aber nein, die Kaczynskis sind echt. Zwei Polen gegen den Rest der Europäischen Union. Die beiden Herren – der eine Ministerpräsident, der andere Staatspräsident – wollen ihr Land aus der bösartig-feindlichen Umklammerung der Europäer herausführen.

Den Zwillingsbrüdern passt rein gar nichts an der EU, außer den Brüsseler Agrarsubventionen. Geld ist immer gut. Um zu vertuschen, dass man halb so viele Menschen im Lande beherbergt wie der neidisch beargwöhnte westliche Nachbar Deutschland, man deshalb auch weniger Gewicht in Gremien erhält, haben die Kaczynskis eine Neugewichtung der politischen Mitsprache gefordert. Durch eine Berechnung mit der Quadratwurzel bekäme Polen mehr Gewicht. Und mehr Gewicht ist gut. Es müsse sich aber unbedingt um eine polnische Quadratwurzel handeln.

Polen macht gar keine Außenpolitik. Polen macht nur Polenpolitik. Das ist natürlich gefährlich. Denn beim Quadratwurzelziehen kann viel passieren. Schon eine einfache Wurzelbehandlung beim Dentisten ist ja nicht nur schön. Beim Rechnen mit der Quadratwurzel gilt es auch die Schmerzen im Quadrat einzukalkulieren.

Man kann zwei Wurzeln einer Matrix A der Größe *n x n* allerdings nur dann leicht bestimmen, wenn A eine Diagonalmatrix ist oder sich zumindest in eine Diagonalform überführen lässt. Nur als Beispiel. Wissen das die Kaczynskis? Sofern nachlässig gewurzelt wird – wovon auszugehen ist –, fliegt Polen blitzschnell aus dem Spiel und findet sich wieder als Mitglied der Vereinigten Staaten von Amerika.

Andererseits kann letztendlich nur dies die Lösung sein. Bush ist erfreut, die Kaczynskis sind endlich mal dankbar und das in Europa fehlende Polen wird für eine Erweiterung der Ostsee genutzt. In Frankfurt an der Ostsee wird dann ein großes Quadratwurzelmahnmal aufgestellt. Zum Gedenken an die beiden Erfinder der Selbstentwurzelung.

Hausübungen

H17 (Fibonaccifolge) 18 Punkte

Die Folge der Fibonaccizahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ läßt sich durch folgende Rekursionsvorschrift angeben:

$$f_0 = 0, \quad f_1 := 1 \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

i) Finde eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass

$$F^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ii) Wie kann F^n durch Fibonaccizahlen beschrieben werden? Zeige, dass gilt:

$$F^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} \quad n = 1, \ldots \quad , \quad F^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{N}.$$

iii) Zeige, dass F die Gleichung $F^{n+1} = F^n + F^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Wir versuchen jetzt mit Hilfe der Eigenwerttheorie eine explizite Darstellung der Fibonaccizahlen zu finden.

iv) Berechne hierzu die Eigenvektoren von F und diagonalisiere F. Wir bezeichnen die diagonalisierte Matrix mit D_F.

v) Bestimme nun D_F^n und mittels der Basiswechselmatrix F^n. Gib explizit die n-te Fibonaccizahl f_n an. Dies ist die berühmte Binetsche Formel.

vi) Sei $g = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ der Goldene Schnitt . Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ für den Quotienten der Komponenten der Folge von Vektoren $F^n x$ gilt:

$$\frac{(F^n x)_2}{(F^n x)_1} \to g.$$

Folgere hieraus, dass der Quotient $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ ebenfalls für $n \to \infty$ gegen g konvergiert.
Hinweis: Schreibe x als Linearkombination der Eigenvektoren.

H18 (Stochastische Matrizen) 19 Punkte

In der Physik (z.B. in der statistischen Mechanik) gibt es viele Prozesse, die sich durch stochastische Matrizen beschreiben lassen. Eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ik})$ heißt stochastische Matrix oder Übergangsmatrix, falls gilt:

a) $a_{ik} \geq 0, \quad \forall i, k = 1 \ldots n\,;$

b) $\sum_{i=1}^n a_{ik} = 1, \quad \forall k = 1, \ldots, n\,.$

A heißt strikt positiv ($A > 0$), falls $a_{ik} > 0,\ \forall i, k = 1, \ldots n$. Eine stochastische Matrix wird folgendermaßen interpretiert: Man hat n Zustände $1, \ldots, n$ und interessiert sich für zufällige Übergänge zwischen diesen innerhalb einer Zeiteinheit. Ein Matrixelement a_{ik} gibt die Wahrscheinlichkeit an, in einem Schritt in den Zustand i zu gelangen, wenn man zu Beginn im Zustand k ist. Die Bedingung $b)$ garantiert, dass man mit Wahrscheinlichkeit 1 in irgendeinem der Zustände ankommt. - Die Matrix A definiert nun den Zufallsprozeß auf folgende Weise: Zu Beginn seien $w_1, \ldots, w_n$ die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich das System in den Zuständen $1, \ldots, n$ befindet, d.h. es gelte

c) $w_i \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$ und $\sum_{i=1}^n w_i = 1.$

Ein Vektor $x_0 = (w_1, \ldots, w_n)$, der diese Bedingung erfüllt, heißt Wahrscheinlichkeitsvektor oder Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Zuständen $1, \ldots, n$. In einem Prozeßschritt finden nun Übergänge zwischen den Zuständen mit den Übergangswahrscheinlichkeiten a_{ik} statt. Mithin ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System sich nach einer Zeiteinheit im Zustand i befindet, durch

$$(x_1)_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} w_k$$

gegeben. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach einem Schritt ist also $x_1 = Ax_0$. Wiederum garantieren a),b),c), dass x_i ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsvektor ist (nachprüfen!). - Die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach m Schritten ist entsprechend durch

$$x_m := A^m x_0, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

gegeben. - In dieser Aufgabe untersuchen wir die Konvergenz solcher Zufallsprozesse gegen Gleichgewichtszustände, d.h. gegen Wahrscheinlichkeitsverteilungen u mit $Au = u$. Wir werden in mehreren Schritten zeigen:

Satz: Ist A eine stochastische Matrix , sodass $A^r > 0$ für ein $r \in \mathbb{N}$ gilt, so folgt:

(1) 1 ist ein Eigenwert von A und es existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsvektor u mit $Au = u$;

(2) Für jeden Wahrscheinlichkeitsvektor x konvergiert $A^m x$ komponentenweise gegen u, für $m \to \infty$;

(3) Alle weiteren Eigenwerte von A haben einen Beitrag echt kleiner als 1.

i) Sei $y \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Wir definieren: $m(y) :=$ kleinste Komponente von y, $M(y) :=$ größte Komponente von y, $D(y) := M(y) - m(y)$, "Durchmesser von y". Sein nun weiter A eine stochastische Matrix. Dann sind alle Zeilensummen von A^T gleich 1. Zeige:
   1) $m(A^T y) \geq m(y)$; $M(A^T y) \leq M(y)$
   2) Gilt $A > 0$ und ist ϵ der kleinste Matrixeintrag von A, so ist $D(A^T y) \leq (1 - 2\epsilon)D(y)$.

ii) Zeige: Ist $A > 0$, so konvergiert A^m komponentenweise für $m \to \infty$ gegen eine Matrix P, deren Spalten alle gleich einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsvektor u sind.
Hinweis: Betrachte $(A^T)^m e_k$, wobei e_k der k-te kanonische Basisvektor des $\mathbb{R}^n$ ist, und zeige $\lim_{m\to\infty}(A^T)^m e_k = (u_k, \ldots, u_k)$ für ein $u_k > 0$.

iii) Weise nach, dass ii) auch im Fall von stochastischen Matrizen A, für die $A^r > 0$ für ein $r \in \mathbb{N}$ gilt, gilt.
Hinweis: Versuche dich hierbei an der Argumentation in ii) zu orientieren und überlege dir, dass mit $A^r > 0,\ r \in \mathbb{N}$, auch $A^{r+n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

iv) Zeige: Ist A stochastisch und gilt $A^r > 0$ für ein $r \in \mathbb{N}$, so ist $P^2 = P$, $AP = PA = P$ und $Au = u$.

v) Beweise den formulierten Satz.