Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
14.06.2007

Lineare Algebra II für Physiker

4. Übungsblatt

Gruppenübung

G10 (Testfragen)
Wahr oder falsch?

i) Eine $n \times n$-Matrix kann nicht mehr als n Eigenwerte haben.
ii) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind
   a) orthogonal zueinander;
   b) linear unabhängig;
   c) eine Basis des Bildes der zugehörigen Abbildung.
iii) Eine $n \times n$-Matrix A über einem Körper $\mathbb{K}^n$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn
   a) A n verschiedene Eigenwerte hat;
   b) A nur einen Eigenwert λ hat und dessen geometrische Vielfachheit n ist;
   c) es in $\mathbb{K}^n$ eine Basis von Eigenvektoren von A gibt.

G11 (Eigenwerte und Eigenvektoren I)
Berechne charakteristisches Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

i) Die Paulischen Spinmatrizen $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \pi & 1 \\ \pi & 1 & \pi \end{pmatrix}$.

G12 (Eigenwerte und Eigenvektoren II)
Sei $x \neq 0$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) Sei $B = A - b\mathbb{1}$, $b \in \mathbb{K}$. Zeige, dass x auch ein Eigenvektor von B ist, und gib den zugehörigen Eigenwert an.
ii) Sei S invertierbar, und sei $C = S^{-1}AS$. Zeige, dass λ ein Eigenwert von C ist. Gib den zugehörigen Eigenvektor an.
iii) Sei A invertierbar. Zeige, dass $\lambda \neq 0$ ist.
iv) Sei A invertierbar. Zeige, dass x ein Eigenvektor von A^{-1} ist, und gib den zugehörigen Eigenwert an.

G13 (Eigenwerte und Eigenvektoren III)
Sei A eine $n \times n$-Matrix mit n unterschiedlichen Eigenwerten λ_i, und sei B eine weitere $n \times n$-Matrix mit $AB = BA$. Zeige, dass es dann eine A und B gemeinsame Basis aus Eigenvektoren von A und B gibt.

G14 (Beliebte Klausuraufgaben)
Bestimme die Determinante der Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$