Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
07.06.2007

Lineare Algebra II für Physiker

4. Übungsblatt

Hausübung

H13 (Determinante einer Blockmatrix) 5 Punkte
Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in M^{n\times m}$ und $C \in M^{m\times m}$ Matrizen, und sei M die Blockmatrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Zeige, dass $\det(M) = \det(A)\det(C)$ gilt.

H14 (Cramersche Regel) 5 Punkte
Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit der invertierbaren Matrix A. Um die Komponente x_i des Vektors $x = A^{-1}b$ mittels Determinanten ausrechnen zu können, benutzen wir einen kleinen Trick. Es sei $X_i = (e_1, \ldots, x, e_n)$ diejenige Matrix, die aus $\mathbb{1}_{n\times n}$ hervorgeht, indem man als i-te Spalte x statt e_i wählt. A habe die Spalten $s_1, \ldots, s_n$.

i) Zeige, dass gilt: $B_i := (s_1, \ldots, s_{i-1}, b, s_{i+1}, \ldots, s_n) = AX_i$.

ii) Zeige, dass $\det X_i = x_i$

iii) Zeige nun: $x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$.

H15 (Jacobi-Determinante) 7 Punkte
Die Volumenverzerrung einer linearen Abbildung ist über die Determinante gegeben. Um dies auf weitere Funktionen zu verallgemeinern, behilft man sich mit einem mathematischen Klassiker: Man linearisiert die Abbildung lokal, d.h., man nimmt an, die Abbildung sei in einer hinreichend kleinen Umgebung durch eine lineare Abbildung zu approximieren. Für diese Umgebung läßt sich nun der Zerrfaktor der Abbildung durch den Zerrfaktor der Linearisierung berechnen. In der Analysis lernt man, dass diese Linearisierung durch die Jacobimatrix gegeben ist. Sei $f: \ D \subseteq \mathbb{R}^n \to F \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, dann ist $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ die Jacobimatrix. $\det((\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{ij})$ ist die so genannte Jacobideterminante; der Zerrfaktor ist jetzt natürlich von dem Punkt x abhängig, an dem die partiellen Ableitungen ausgewertet werden.

i) Bestimme die Jacobimatrix einer linearen Abbildung $f: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ im Punkt x.

ii) Bestimme Jacobimatrix und Jacobideterminante der Abbildung

$$f:]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2, \ (r,\phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi)$$

im Punkt x (Transformation in Polarkoordinaten).

iii) Bestimme Jacobimatrix und Jacobideterminante der Abbildung

$$f:]0,\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3, \ (r,\theta,\phi) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi).$$

im Punkt x (Transformation in Kugelkoordinaten).

iv) Im Bronsteins Taschenbuch der Mathematik findet sich folgende Formel:

$$\int_V dV = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi$$

Deute diese Formel. Was bezeichnet V?

H16 (Slater-Determinante) 9 Punkte

Eine Funktion $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nennt man anti-symmetrisch, falls für eine Permutation der n Koordinanten $\pi \in S_n$ gilt:

$$\Psi(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = \operatorname{sign}\pi \cdot \Psi(x_1, \ldots, x_n),$$

d.h., unter einer Permutation der Koordinaten verändert Ψ höchstens das Vorzeichen. Seien nun $\psi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ gegeben. Aus diesen möchten wir eine anti-symmetrische Funktion $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konstruieren.

i) Sei $n = 2$. Zeige, dass $\Psi(x_1, x_2) := \frac{1}{\sqrt{2!}}(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2))$ eine anti-symmetrische Funktion ist.

ii) Mache dir klar, dass die in i) definierte Funktion Ψ sich auch schreiben läßt als:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \sum_{\pi \in S_2} \operatorname{sign}\pi \cdot \psi_1(x_{\pi(1)})\psi_2(x_{\pi(2)}).$$

iii) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ definiert man nun $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ wie folgt:

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}\pi \cdot \psi_1(x_{\pi(1)}) \cdots \psi_n(x_{\pi(n)}).$$

Zeige, dass Ψ anti-symmetrisch ist. Erinnerung: $\operatorname{sign}(\pi_1\pi_2) = \operatorname{sign}\pi_1 \cdot \operatorname{sign}\pi_2$.

iv) Zeige, dass gilt:

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \cdots & \psi_1(x_n) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \cdots & \psi_2(x_n) \\ \vdots & & \vdots & \\ \psi_n(x_1) & \psi_n(x_2) & \cdots & \psi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

Diese Funktion wird in der (Vielteilchen-) Physik Slater-Determinante genannt. Dort beschreibt x_j die Freiheitsgrade eines Teilchens, zB. $x_j \in \mathbb{R}^3$ und die Zustands- oder Wellenfunktionen $\psi_1, \ldots, \psi_n(x_j)$ bezeichnen die möglichen Zustände eines Teilchens. Ψ ist die (antisymmetrisierte) Vielteilchenzustands-oder Wellenfunktion, die aus den Einteilchenzuständen gewonnen wird und ein System von n ununterscheidbaren Teilchen beschreibt. Teilchen in einem System mit antisymmetrischer Vielteichenzustandsfunktion nennt man Fermionen. Typische Fermionen sind die Elektronen.

v) Das Paulische Ausschließungsprinzip besagt, daß sich zwei Fermionen nicht in demselben Einteilchenzustand befinden können. Leite dies her.
Hinweis: $|\Psi|^2$ gibt die "Aufenthaltswahrscheinlichkeit" der Teilchen an.