Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
24.05.2007

Lineare Algebra II für Physiker

3. Übungsblatt

Gruppenübung

G07 (Matrix-Block-Multiplikation)
Die Multiplikation größerer Matrizen kann oft dadurch vereinfacht werden, dass sie in Blöcke eingeteilt und "blockweise" multipliziert werden:
Sind M, M' zwei $(n+m) \times (n+m)$-Matrizen mit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, wobei $A, A' \in M_{n,n}$, $B, B' \in M_{n,m}$, $C, C' \in M_{m,n}$ und $D, D' \in M_{m,m}$ gilt, so ist

$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

i) Überprüfe die Gültigkeit dieser Regel anhand des Beispiels $M = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix}$, $\quad M' = \begin{pmatrix} s_2 & -s_1 \\ -s_1 & s_2 \end{pmatrix}$ mit $s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Berechne durch eine geschickte Blockeinteilung das Quadrat der Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

iii) Sei die Matrix M von der Form $\left(\begin{array}{c|c} n \times i & n \times j \\ \hline m \times i & m \times j \end{array}\right)$. In welche Blockform muß eine Matrix M' eingeteilt sein, sodass man das Produkt MM' mittels Blockmultiplikation bilden kann?

G08 (Determinante)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Berechne $\det(A)$ durch Spalten- und Zeilenumformungen.

ii) Bestimme die Determinanten der Matrizen $A^t, A^{-1}, A^2, A \cdot A^t$ und $A + A^t$.

iii) Bestimme für $t \in \mathbb{R}$ $\det(A - t\mathbb{1}_{4\times 4})$. Zeige, dass für geeignete Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$

$$\det(A - t\mathbb{1}_{4\times 4}) = t^4 - tr(A)t^3 + at^2 + bt + \det(A)$$

gilt, wobei $tr(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}$ die Spur von A ist. Für welche Werte von t besitzt $A - t\mathbb{1}_{4\times 4}$ keine inverse Matrix?

G09 ($SL(n, \mathbb{K})$)

i) Zeige, dass die Menge der invertierbaren Matrizen, deren Determinante gleich 1 ist, eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{K})$ bilden (die sog. $SL(n, \mathbb{K})$, "special linear group").

ii) Zeige, dass die Menge der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen, $\{A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{K}) : a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$, eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{K})$ bildet.

iii) Zeige, dass die Menge der invertierbaren 2×2-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen, deren Determinante gleich 1 ist, eine Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ bilden (die sog. $SL(2, \mathbb{Z})$).

(Bem: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$)

iv) Wähle zwei Matrizen aus $SL(2, \mathbb{Z})$ und bestimme das Bild des Einheitswürfels in $\mathbb{R}^2$ unter den beiden Matrizen.

Hausübungen

H08 (Volumen) 4 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und sei P_A das von den Spalten von A erzeugte Parallelepiped. Dann ist $vol(P_A) = |\det A|$ das Volumen von P_A. Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass f genau dann volumenerhaltend ist, wenn $\det f = \pm 1$

H09 (Orthogonale Matrizen) 9 Punkte

Sei A eine 2×2 Matrix über $\mathbb{R}$ mit $A^t A = \mathbb{1}$ und $\det(A) = 1$.

i) Zeige, dass sich A in der Form

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in \mathbb{R}$ schreiben läßt.

ii) Zeige, dass A winkel-, längen- und volumenerhaltend ist.

H10 (Dimension) 6 Punkte

i) Sei U ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige, dass genau dann $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ für alle $A, B \in M_{n,n}$, wenn $\dim U = 1$ ist.

ii) Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ($n < \infty$), und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^2 = -\mathbb{1}_{n \times n}$. Warum ist die Dimension von V gerade?

iii) Finde eine Matrix A mit $A^2 = -\mathbb{1}_{n \times n}$.

H11 (Determinante eines Endomorphismus) 2 Punkte

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B \in M_{n,n}$. Definiere eine Abbildung $f_B: M_{n,n} \to M_{n,n}$ durch

$$f_B(A) = AB - BA \quad \text{für} \quad A \in M_{n,n}.$$

Zeige: $\det f_B = 0$.

H12 (Permutationsmatrizen) 17 Punkte

Eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\{0, 1\}$ und Zeilen- und Spaltensumme gleich 1 heißt Permutationsmatrix. Sei $PerM_n$ die Menge der Permutationsmatrizen mit festem n.

i) Zeige, dass $PerM_n$ mit Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist.

Betrachte nun die Abbildung $i: S_n \to End(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\pi \mapsto \Pi$, $\Pi(e_i) := e_{\pi(i)}$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$ ist.

ii) Zeige, dass bezüglich der Standardbasis die Abbildungsmatrix M_Π von Π eine Permutationsmatrix ist, d.h., $M_\Pi \in PerM_n$.

Wir dürfen i daher als Abbildung in die $n \times n$-Matrizen begreifen.

iii) Zeige, dass mittels i eine bijektive Abbildung von S_n in die Permutationsmatrizen gegeben ist.

iv) Zeige, dass $i(\pi_1 \pi_2) = i(\pi_1) i(\pi_2)$ und $i(id) = \mathbb{1}$, d.h., anschaulich, dass die Abbildung i die Gruppenstruktur erhält.

Eine bijektive (gruppen-)strukturerhaltende Abbildung nennt man einen (Gruppen-)Isomorphismus.

v) Zeige, dass für das Vorzeichen $sign$ einer Permutation $\pi \in S_n$ gilt $sign(\pi) = det(i(\pi))$. Das Vorzeichen einer Permutation läßt sich demnach über die Determinante der zugehörigen Permutationsmatrix ausrechnen.

vi) Berechne mit Hilfe von v) das Vorzeichen folgender Permutationen:

a) $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$