Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
10.05.2007

Lineare Algebra II für Physiker

2. Übungsblatt

Wiederholung
Berechne alle möglichen Produkte zwischen folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 4 \\ -6 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als Lösungsschlüssel die Summe der Einträge ($\mod 11$): $10, 5, 9, 7, 1, 3, 9$

Gruppenübungen

G04 *(Numerisches Lösen eines LGS)*
Bei der numerischen Lösung von linearen Gleichungssystemen treten bei der Division mit kleinen Zahlen häufig sogenannte Überläufe auf und der Computer ist gezwungen zu runden. Angenommen Du möchtest mit Hilfe eines Computer nachfolgendes lineare Gleichungssystem mittels elementarer Umformungen lösen. Der Speicher ist begrenzt und der Rechner rechnet nur mit vier gültige Stellen im Dezimalsystem, d.h. es können lediglich Zahlen, von der Form $\pm a\, 10^b$, $b \in \mathbb{Z}$ mit vierzifferigem a, exakt dargestellt werden. Finde Folgen von elementaren Umformungen, sodass der Rundungsfehler möglichst groß bzw. klein wird.

$$\begin{pmatrix} 0,00031 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

G05 *(Lineare Optimierung)*
Verwandt mit der Theorie linearer Gleichungssysteme ist das Problem der linearen Optimierung: Gesucht sind Lösungen, die einem System linearer Ungleichungen genügen und unter allen möglichen Lösungen ist eine zu finden, die ein gegebenes lineares Funktional optimiert. Das folgende einfache Beispiel illustriert eine solche Aufgabenstellung.
Eine Firma stellt Fernsehgeräte und Monitore her. Bei der Herstellung muß folgendes beachtet werden:

a) Die Abteilung, die die Geräte herstellt, kann in einem Monat höchstens 1000 Gehäuse für Fernseher oder Monitore herstellen.
b) Die Montageabteilung für Fernseher kann höchstens 600 Stück im Monat zusammenbauen.
c) Die Montageabteilung für Monitore kann im Monat höchstens 800 Sück im Monat zusammenbauen.
d) Die Abteilung für elektrische Installation kann höchstens 800 Fernsehapparate bzw. anstelle von 2 Fernsehern 3 Monitore im Monat fertigstellen.

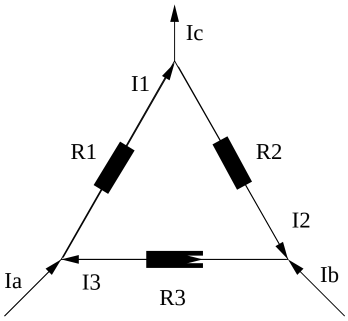
Der Gewinn bei einem Fernsehgerät beträgt 200 €, bei einem Monitor 100 €. Wieviele Fernsehgeräte und Monitore muß die Firma herstellen, damit die Produktion optimal, d.h. der Gesamtgewinn möglichst hoch ist? Löse dieses Problem graphisch; die analytische Methode zur Lösung kannst du dir in einer Numerikvorlesung aneignen.

G06 *($GL(n, \mathbb{K})$)*
Zeige, dass die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ (für festes $n \in \mathbb{N}$) bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bildet. Diese Gruppe heißt $GL(n, \mathbb{K})$.

Hausübungen

H05 *(Stromnetze)* 7 Punkte

Auch bei der Berechnung der Ströme in einem elektrischen Stromkreis treten lineare Gleichungssysteme auf. Betrachte hierzu das abgebildete Netzwerk und verwende die Kirchhoffschen Regeln für elektrische Stromkreise, um ein lineares Gleichungssystem aufzustellen (Die Summe der Teilströme in jedem Knoten sowie die Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist Null). Berechne die Teilströme $I_k, k = 1, 2, 3$, wobei die Widerstände $R1 = 1, R2 = 2, R3 = 3$, die bekannten Ströme $Ia = 5$ und $Ib = 4$ seien. Interpretiere, was es bedeutet, falls bei der Lösung negative Teilströme auftreten. Berücksichtige, dass das Ohmsche Gesetz $U = RI$ gilt.



H06 *(Spline-Interpolation ist Lösen eines linearen Gleichungssystems)* 11 Punkte

Die "Spline-Interpolation" ist ein sehr wichtiges und modernes, in vielen Bereichen eingesetztes Verfahren, eine möglichst glatte, d.h. wenig gekrümmte Funktion durch eine vorgegebene Menge von Wertepaaren zu legen. Seien $x_0 < x_1 < \ldots < x_n \in \mathbb{R}$ fest gegeben und seien $y_0, y_1, \ldots, y_n$ fest gegebene Funktionswerte an den Stellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Eine (sog. "natürliche") Spline-Funktion ist dann eine Funktion $S : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1) $S(x_k) = y_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$;
2) S ist auf jedem Teilstück $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ durch ein Polynom P_k von höchstens drittem Grad gegeben, d.h., es gilt $\forall x \in [x_k, x_{k+1}] \ : \quad S(x) = P_k(x) := a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$, für gewisse Koeffizienten $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$;
3) S ist zweimal stetig differenzierbarauf $[x_0, x_n]$, d.h. es gelten die Anschlußbedingungen $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$:

   3a) $P'_{k-1}(x_k) = P'_k(x_k)$ 3b) $P''_{k-1}(x_k) = P''_k(x_k)$
4) Die zweiten Ableitungen von S an den Randpunkten x_0 und x_n verschwinden, d.h., es gilt

$$P''_0(x_0) = 0 = P''_{n-1}(x_n).$$

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass zu jedem vorgegebenen Satz von Wertepaaren genau eine Funktion existiert, die die Bedingungen 1)-4) erfüllt. Dazu sind die $4n$ Unbekannten a_k, b_k, c_k, d_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ zu bestimmen.

i) Zeige, dass die obigen Bedingungen zu folgendem Satz von Gleichungenäquivalent sind. Dabei wird die Hilfsgröße c_n sowie die Abkürzung $h_k := x_{k+1} - x_k$ eingeführt.
   a) $a_k = y_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$
   b) $b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$;
   c) $c_0 = c_n = 0$ und für $k = 1, 2, \ldots, n-1 :$

   $$h_{k-1}c_{k-1} + 2c_k(h_{k-1} + h_k) + h_k c_{k+1} = \frac{3(y_{k+1} - y_k)}{h_k} - \frac{3(y_k - y_{k-1})}{h_{k-1}}; \quad (*)$$
   d) $d_k = \frac{1}{3h_k}(c_{k+1} - c_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$

   Da sich offenbar alle anderen Größen aus $c_1, \ldots, c_{n-1}$ sowie $c_0 = c_n = 0$ berechnen lassen, ist die Bestimmung der Spline-Funktion auf die Lösung des linearen Gleichungssystems *) für die Unbekannten $c_1, \ldots, c_{n-1}$ zurückgeführt worden.

ii) Stelle die Matrix A des linearen Gleichungssytems (*) auf und zeige, dass diesselbe "diagonaldominant" ist: Eine Matrix $A = (\alpha_{ij})$ heißt diagonaldominant, falls für alle $i = 1, 2, \ldots, m$ gilt:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{m} |a_{ij}| \quad (**)$$

iii) Zeige, dass diagonaldominante $m \times m$-Matrizen A stets invertierbar sind. Nehme dazu an, dass ein von Null verschiedener Vektor $u = (u_1, \ldots, u_m)$ mit $Au = 0$ existiert, und zeige, dass in jener Zeile der Gleichung $Au = 0$, in der das dem Betrag nach größte Element u_i von u steht, ein Widerspruch zu (**) auftritt.

Mit ii) und iii) ist gezeigt, dass das lineare Gleichungssystem (*) universell und eindeutig lösbar ist. Damit ist aber auch die Existenz und Eindeutigkeit einer Spline-Funktion für jeden gegebenen Satz von Wertepaaren $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ gezeigt!

iv) Bestimme die Spline-Funktion, die zwischen den 5 Wertepaaren $(0,0), (1,1), (2,0), (3,-1), (4,0)$ interpoliert. Plotte zur Veranschaulichung die Spline-Funktion und vergleiche mit $\sin(\frac{\pi}{2}x)$.

H07 *(Auch Einstein mußte Matrizen multiplizieren)* 11 Punkte

Für eine einheitliche Beschreibung des elektromagnetischen Feldes führt man als sogenannten "elektromagnetischen Feldtensor" die Matrix

$$F := \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -Bz & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

ein. E_x, E_y, E_z sind die Komponenten des elektrischen, B_x, B_y, B_z die Komponenten des magnetischen Feldes.

i) Sei c die Lichtgeschwindigkeit, $|v| < c$ und $\beta := \frac{v}{c}$, $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ und

$$\Lambda_\beta := \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Berechne Λ_β^{-1} und zeige, dass $\{\Lambda_\beta : \ \beta \in]-1, 1[\}$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bildet.

ii) Λ_β ist die Matrix einer Lorentz-Transformation eines Koordinatensystems, das sich mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung bewegt. Der elektromagnetische Feldtensor transformiert sich unter dieser Lorentztransformation gemäß $F \to \Lambda_\beta^{-1} F \Lambda_\beta$. Zeige, dass auch $\Lambda_\beta^{-1} F \Lambda_\beta$ wieder von derselben Form wie F ist, d.h., dass sich auch die Matrixelemente des transformierten Feldtensors wieder als Komponenten eines elektromagnetischen Feldes interpretieren lassen. - Zeige, dass unter der Transformation aus einem rein elektromagnetischen (bzw. magnetischen) Feld ein allgemeines elektromagnetisches Feld wird, und zeige weiter, dass Felder, deren z-Komponenten verschwinden, unter Transfromation invariant bleiben.