Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
26.04.2007

Lineare Algebra II für Physiker

1. Übungsblatt

Gruppenübungen

G01 *(Elementarumformungen)*
Welche der folgenden Matrizen sind durch Zeilen- oder Spaltenumformungen auseinander hervorgegangen? Verwende, daß rang eine Invariante unter Elementarumformungen ist.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi \\ \pi & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pi & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

vi) $\begin{pmatrix} 0 & \pi & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & \pi & 0 \end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix} \pi & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ viii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ix) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

G02 *(Zeilenumformungen)*
Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wir berechnen daraus eine neue Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, indem wir auf A die Zeilenumformung $Z_2 \rightsquigarrow Z_2 + 2Z_1$ und dann auf die so entstandene Matrix die Zeilenumformung $Z_3 \rightsquigarrow Z_3 - Z_1 + 3Z_2$ anwenden. Schreibe nun B als das Produkt zweier Matrizen, von denen eine gleich A ist.

G03 *(Inverse einer Matrix)*
In dieser Aufgabe werden wir ein bekanntes Verfahren zur Inversion von Matrizen beweisen.

i) Zeige, daß jede $n \times n$-Matrix A mit $\operatorname{rang}(A) = n$ durch Zeilenumformungen auf Diagonalgestalt gebracht werden kann. Folgere hieraus, daß A durch Zeilenumformung in eine Einheitsmatrix überführt werden kann.

ii) Sei A eine $n \times n$-Matrix mit $\operatorname{rang}(A) = n$, die durch gewisse elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix überführt wird. Zeige: Wenn man diesselben Zeilenumformungen (in derselben Reihenfolge) auf die Einheitsmatrix anwendet, erhält man die Matrix A^{-1}.

iii) Bestimme mit diesem Verfahren die Inversen folgender Matrizen :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hausübungen

H01 *(Rang)* 10 Punkte

Berechne für folgende $n \times n$-Matrix A: $\ker A$, Bild$A$, rang$A$, A^2 und beschreibe für $n = 2, 3$ die durch A gegebene Abbildung geometrisch:

$$A = -\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix}.$$

H02 *(Rang)* 7 Punkte

Bestimme den Rang folgender Matrizen über $\mathbb{R}$

$$\text{i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{ii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

H03 *(Rang und Zeilenumformungen)* 10 Punkte

i) Es seien U, V, W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\phi : U \to V$, $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige:
$$\text{rang}(\psi \circ \phi) \leq \min\{\text{rang}(\psi), \text{rang}(\phi)\}$$

ii) Es seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times k}$. Zeige:
$$\text{rang}(A \cdot B) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$$

iii) Sei A invertierbar. Zeige, daß dann gilt: $\text{rang}(A \cdot B) = \text{rang}(B)$.

iv) Sei A eine $n \times n$-Matrix. Zeige $\text{rang}(A \cdot A^*) = \text{rang}(A)$. ($A^*$ ist die Adjungierte von A.)

H04 *(Rang-1-Operatoren)* 7 Punkte

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Zeige, daß rang$A = 1$ genau dann, wenn Vektoren $x \in \mathbb{K}^m$, $y \in K^n$ mit $A = y \cdot x^*$ existieren.

Finde nun für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$, sodaß $A = y \cdot x^*$.

Bemerkung: x^* ist die Adjungierte von x und $\cdot$ die Matrixmultiplikation. Die Matrix A bezeichnet man auch als Rang-1-Operator. Diese Operatoren werden euch spätestens in der Quantenmechanik wieder begegnen. Dort werden sie in der Dirac Notation als $|y\rangle\langle x|$ geschrieben.