Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

06.07.2007

Mathematik II für ET, WI(ET), EPE, IKT, IST, CE, SpoInf
12. Übung

Hinweis: Raumverlegung für die Semestralklausur (nur für Studierende des Faches Sportinformatik!): Die Semestralklausur findet am 18.7.2007, 17:00-19:00 Uhr im Raum **S1 01/50** statt. Bitte Studentenausweis mitbringen.

Gruppenübung

G 34 Parameterintegral

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $0 \neq m \in \mathbb{R}$ und

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t f(u) \sin(m(t-u)) du.$$

Berechnen Sie dx/dt und d^2x/dt^2. Zeigen Sie, daß die Funktion $x(t)$ die Gleichung $d^2x/dt^2 + m^2 x = f(t)$ löst.

G 35 Potential

Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F : (x, y) \mapsto (y^2 \cdot \cos x, 2y \cdot \sin x - 3)^T.$$

Besitzt dieses Vektorfeld ein Potential? Wenn ja, dann berechnen Sie dieses.

G 36 Wegintegral

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} y - x \\ y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Wegintegral von F entlang der Kurve
$K = \{X(t) = (t, \sin(t\pi/2)),\ t \in [0, 1]\}$.
Besitzt F ein Potential?

Hausübung

H 34 Weglänge

Seien W_1 der Weg parametrisiert durch $(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, und W_2 der Polygonzug, der die Punkte $(1, 0)$ über $(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ mit $(-1, 0)$ verbindet. Berechnen Sie, welche der beiden Wege kürzer ist.

H 35 Wegintegral

Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F : (x, y, z) \mapsto (y + z, z + x, x + y)^T.$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\int F \cdot dX$ entlang des Weges $X : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $X(t) = (t, t^2, t^3)^T$.

H 36 Vektorfeld

Sei das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \left(\frac{2xy - y - yx^2}{1+x^2}, \ln\left(\frac{1+x^2}{e^x}\right) \right)$$

gegeben. Entscheiden Sie, ob F ein Potential besitzt.
Berechnen Sie die Wegintegrale

$$\int_{W_1} F \cdot dX, \qquad \int_{W_1 \oplus W_2} F \cdot dX.$$

Dabei bezeichne W_1 den Polygonzug, der die Punkte$(-1,1)$ und $(1,1)$ über den Punkt $(0,c)$, $c \in \mathbb{R}$ verbindet. W_2 bezeichnet den gleichen Polygonzug wie W_1, jedoch mit umgekehrter Orientierung.

Aufgaben, die Sie ohne Hilfsmittel lösen sollten

- Welche Aussage können Sie hinsichtlich der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ treffen?
- Sei f eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Für die Koeffizienten der Taylorreihe in einer Umgebung von a gelte $f^{(k)}(a) = 0$ für alle $k = 0, 1, \ldots$
  Folgt daraus $f = 0$?
- Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Es gelte immer $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
  1. Gilt $\nabla f(x_0) = 0$ und $f(x_0) = 0$, so liegt ein Sattelpunkt in x_0 vor.
  2. Die Hessematrix $H_f(x_0)$ ist negativ definit. Dann ist x_0 ein relatives Minimum, falls $\nabla f(x_0) = 0$.
  3. Es gilt $\nabla f(x_0) = 0$ und $H_f(x_0)$ ist positiv definit. Dann ist x_0 ein globales Minimum.