Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
29.06.07

Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB) SpoInf, IKT, CE, EPE, IST
Übung 11

Gruppenübung

G31: (Implizite Funktionen)

Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; g(x, y) = e^{x-y} + x^2 - y - 1.$$

Ist die implizite Gleichung $g(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ nach y auflösbar? Finden Sie dy/dx in $(0, 0)$.

G32: (Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen)

Bestimmen Sie das Volumen ($V = 8xyz$) des größten Quaders mit achsenparallelen Kanten der Länge $2x$, $2y$ bzw. $2z$ innerhalb des Ellipsoids $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

G33: (Methode der kleinsten Quadrate)

Das Gleichungssystem $Ax = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} 251 \\ 352 \\ -399 \\ 549 \end{pmatrix}$$

soll gelöst werden.

a) Ist das System $Ax = y$ lösbar? Begründung.

b) Stellen Sie die *Gaußschen Normalgleichungen*, d.h. $A^T Ax = A^T y$, zu dem gegebenen Gleichungssystem auf und bestimmen Sie dessen Lösung x.

Hausübung

H31: (Inverse Funktionen)

a) Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to E \subset \mathbb{R}^n$, die eine stetig differenzierbare Inverse besitzt. D und E seien offen. Zeigen Sie, dass die Beziehung $\det J_{f^{-1}}(y)|_{y=f(x)} = 1/\det J_f(x)$ gilt.

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$(x, y) \to \begin{pmatrix} x + e^y \\ y - e^y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(J_{f^{-1}})$ im Punkt $(1, 1)$.

H32: (Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen)
Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der Ellipse $x^2 + xy + y^2 = 5$, d.h. die Punkte (x, y) mit dem größten bzw. kleinsten Abstand ($\sqrt{x^2 + y^2}$) zum Ursprung $(0, 0)$.

H33: (Methode der kleinsten Quadrate) Das Gleichungssystem $Ax = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} 401 \\ 201 \\ 449 \\ 149 \end{pmatrix}$$

soll gelöst werden.

a) Ist das System $Ax = y$ lösbar? Begründung.

b) Stellen Sie die *Gaußschen Normalgleichungen* zu dem gegebenen Gleichungssystem auf und bestimmen Sie dessen Lösung x.

c) Beurteilen Sie die Qualität der nach b) gewonnenen Näherungslösung für das ursprüngliche Gleichungssystem, indem Sie den Quotienten

$$\frac{\|Ax - y\|}{\|y\|} \times 100\%$$

berechnen.