Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2007
22.06.07

Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB) SpoInf, IKT, CE, EPE, IST
Übung 10

Gruppenübung

G28: (Richtungsableitung)

Gegeben sei die Funktion

$$z = f(x, y) = e^{-(9x^2+4y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Bestimmen Sie die geometrische Gestalt der Höhenlinien von f und skizzieren Sie diese.

b) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $(1, 2)$. Wie groß ist die Richtungsableitung in diese Richtung?

c) Geben Sie die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1, 2)$ an.

G29: (Taylorentwicklung)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y, z) = x^3(y - x)^2.$$

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung zweiten Grades im Punkt $(0, 0, 0)$ und geben Sie das Restglied an.

G30: (Extremwertbestimmung)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \exp(xy + x - y)$$

auf $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, x - 4 \leq y \leq 0\}$.
Untersuchen Sie die Funktion f auf relative Extrema oder Sattelpunkte im Innern von $D(f)$ und bestimmen Sie deren Typ. Diskutieren Sie das Verhalten von f auf dem Rand von $D(f)$ und ermitteln Sie die globalen Extema von f auf ganz $D(f)$.

Hausübung

H28: (Richtungsableitung)

Gegeben sei die Funktion

$$z = f(x, y) = e^{xy} - 3x^3y + x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von f im Punkt $(1,0)$ in die Richtungen $(1,1)^T$, $(2,2)^T$, $(3,4)^T$, $(0,1)^T$.

b) Zeigen Sie, dass die Beträge aller Richtungsableitungen in $(1,0)$ kleiner oder gleich $\sqrt{5}$ sind. In welcher Richtung erhält man genau diesen Wert?

H29: (Taylorentwicklung)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = x^3 \ln(xy), \quad x > 0, y > 0.$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades $T_2(x,y)$ um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.

b) Schätzen Sie den Fehler von $T_2(x,y)$ an der Stelle $(1,0.9)$ nach oben ab.

H30: (Extremwertbestimmung)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y, \quad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

Bestimmen Sie alle relativen Extrema von f und deren Typ.

Besitzt die Funktion ein absolutes Maximum oder Minimum auf den Quadranten mit $x > 0, y < 0$ bzw. $x < 0, y > 0$?

Hinweis:

Betrachten Sie dazu das Verhalten von f für $(x,y) \to (x,0-)$ bzw. $(x,y) \to (0+,y)$ und für $(x,y) \to (0-,y)$ bzw. $(x,y) \to (x,0+)$.