Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

15.06.2007

Mathematik II für ET, WI(ET), EPE, IKT, IST, CE, SpoInf

9. Übung

Gruppenübung

G 25 Stetigkeit

Wir betrachten die Funktionen g_1, $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D(g_i) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $i = 1, 2$,

$$g_1(x,y) = \exp\left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right),\ g_2(x,y) = \sin\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right).$$

Sind g_1 und g_2 stetig? Sind sie in $(0,0)$ stetig fortsetzbar, d.h. existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_i(x,y) = c$ und sind die Funktionen

$$\bar{g}_i(x,y) = \begin{cases} g_i(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ c, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad i = 1, 2$$

in $(0,0)$ stetig?

G 26 Kettenregel und Gradient

(i) Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = e^{r^\lambda},\ r = ||x||,\ \lambda \neq 0$$

mit $D(g) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie den Gradienten von f, die Richtung des steilsten Anstiegs im Punkt $(1, \ldots, 1)^T$ und die Richtungsableitung in diese Richtung.

(ii) Wir betrachten die Funktionen

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y,z) = e^{-2x} 3y - z,$$

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad h(u,v) = \begin{pmatrix} \sin v \\ u^2 + v^2 \\ v \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(u,v) = g(h(u,v))$, sowie - mit und ohne Kettenregel - den Gradienten von f.

G 27 Totale Ableitung

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x_1,x_2,x_3) = e^{3x_1x_2 + x_3^2}.$$

(i) Bestimmen Sie die totale Ableitung von f.

(ii) Schätzen Sie den Betrag des maximalen relativen Fehlers $\frac{\Delta f}{f}$ von f im Punkt $(0,1,2)$ für Meßfehler $\Delta x_1 = 0.1$, $\Delta x_2 = 0.01$, $\Delta x_3 = 0.3$ ab.

Hausübung

H 25 Partielle Ableitungen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy(x^2-y^2)}{4x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie f_x und f_y für $(x,y) \neq (0,0)$. Gilt die Beziehung $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$?

(ii) Zeigen Sie, daß $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. Warum sind diese zweiten Ableitungen nicht gleich?

Hinweis: Für Teil (i): Leiten Sie die Funktion in der gegebenen Form mit Hilfe der Produktregel ab (d.h. ohne Ausmulitplizieren).
Für Teil (ii): Betrachten Sie die Differenzenquotienten.

H 26 Kettenregel und Gradient

Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x^2 - 3xy$$

und

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad h(t) = (\sin t, \tfrac{1}{4}(t+2)^3)^T.$$

(i) Bestimmen Sie den Gradienten von f an der Stelle $(1,1)$.

(ii) Bestimmen Sie die Ableitung von $f(h(t))$ mittels der Kettenregel.

H 27 Maximum und Minimum

Besitzen die Funktionen

$$f : [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} : \ (x,y) \mapsto \frac{x^5 - 4x^3 + 3x^2y + 8x - 2}{x^6 + y^4 + 17}$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ein Maximum, ein Minimum oder beides?

Aufgaben, die Sie ohne Hilfsmittel lösen sollten

- Geben Sie die Reihenentwicklung von $\sin(2x)$ und $\cos x$ an.
- Was gibt der Konvergenzradius einer Potenzreihe an?
- Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
  1. Konvergiert die Folge $(a_n)_n$, so konvergiert die Reihe $\sum a_n$.
  2. Ist $(b_n)_n$ eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum b_n$.
  3. Konvergiert die Reihe $\sum c_n$, so ist die Folge $(c_n^2)_n$ eine Nullfolge.