Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
08.06.07

Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB) SpoInf, IKT, CE, EPE, IST

Übung 8

Gruppenübung

G22: (Fourier-Reihen)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = |x - \pi|$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Interval $[-4\pi, 4\pi]$ und bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe von f und was ist die Grenzfunktion?

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Fourier-Reihe von f den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

G23: (Topologie)

Skizzieren Sie die Mengen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) < 4\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 3,\ y \leq 4\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 2\}$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung) an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt sind. Bestimmen Sie außerdem jeweils den Rand und die abgeschlossene Hülle der Menge.

G24: (Folgen in $\mathbb{R}^N$)

Wir betrachten die folgenden Folgen:

$$a_n = \left(n, \frac{1}{n}\right)^T, \quad b_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{n}{n+1}\right)^T, \quad c_n = \left((2 + \frac{1}{n}), -2, (1 - \frac{1}{n})^{2n}\right)^T.$$

Skizzieren Sie diese Folgen und entscheiden Sie, welche von ihnen konvergent sind und welche nicht. Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

Hausübung

H22: (Fourier-Reihen)

a) Bestimmen Sie die Fourier-Reihen der auf $\mathbb{R}$ 2π-periodischen Funktionen

$$f(x) = |\sin x|$$

und

$$g(x) = \pi - e^2 \frac{\cos(3x)}{2}.$$

Stimmen Fourier-Reihe und Funktion überein?

b) Sei $0 < a < 1$. Bezeichne f_a die 1-periodische Funktion, für die gilt

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le a \\ 0, & a < x < 1 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f_a. Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe. Stimmt diese mit f_a überein?

H23: (Topologie)

Skizzieren Sie die Mengen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge y\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le 1,\ y = 0\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \le 1\} \backslash \{(0, 0)\},$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin x\}$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung) an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt sind. Bestimmen Sie außerdem jeweils den Rand und die abgeschlossene Hülle der Menge.

H24: (Folgen in $\mathbb{R}^N$)

Wir betrachten die folgenden Folgen:

$$a_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right)^T, \quad b_n = \left(\sin\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{4}\right), \frac{1}{n}, \cos\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{4}\right)\right)^T, \quad c_n = \left(n, (-1)^n, \frac{n^2}{2^n}, \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^T.$$

Skizzieren Sie diese Folgen und entscheiden Sie (mit Begründung), welche von ihnen konvergent sind und welche nicht. Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?