



Mathematik II für ET, WI(ET), EPE, IKT, IST, CE, SpInf

7. Übung

Gruppenübung

G 19 Potenzreihen

- (a) Wir betrachten die Menge $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 1\}$. Zeigen Sie mittels des Potenzreihenansatzes, daß für $f(x) = \ln x$, $x \in A$ gilt $f'(x) = 1/x$.

Hinweis: $\ln x = \ln(1 + (x - 1))$.

- (b) Sei nun $x_0 \neq 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Reihe

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n}{n}$$

und geben Sie das Konvergenzintervall an. Auf dem Konvergenzintervall sei die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $S(x)$. Zeigen Sie, daß auf dem Konvergenzintervall gilt $\frac{d}{dx}g(x) = \frac{1}{x}$.

G 20 Taylorpolynom

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(x, x_0)$ für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(\cos x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ sowie das zugehörige Lagrange-Restglied $R_3(x, x_0)$.

Welchen Fehler begeht man höchstens, wenn die Funktion f im Intervall $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ durch das ermittelte Taylorpolynom dritten Grades ersetzt wird?

G 21 Taylorreihe

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f: \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{8x}{4x^2 - 1}$$

im Entwicklungspunkt $a = 0$.

Hinweis: Betrachte $\int f(x)dx$ und verwende $\ln(1 + y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n$.

Hausübung

H 19 Potenzreihen

Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!}.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Reihe und geben Sie das Konvergenzintervall an. Auf dem Konvergenzintervall wird die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die obige Reihe beschrieben. Zeigen Sie, daß $f''(y) = f(y)$.

H 20 Taylorpolynom

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_3(x, 1)$ zu $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x - \ln x)$. Berechnen Sie ebenfalls $T_3(\frac{2}{3}, 1)$ und schätzen Sie den zugehörigen Fehler ab, ohne den Wert $f(2/3)$ direkt zu benutzen.

H 21 Taylorreihe

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $\arcsin : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ um die Entwicklungsstelle 0 bis zum vierten Grad, einschließlich des Restgliedes R_4 .

Aufgaben, die Sie ohne Hilfsmittel lösen sollten

- Was können Sie über die Lösbarkeit des Gleichungssystems $Ax = 0$ aussagen (A, x besitzen geeignete Dimensionen)?
- Was ist der Kern einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?
- Wie lautet die definierende Gleichung für Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix B ?