

Mathematik II für ET, WI(ET), ET(LAB) SpoInf, IKT, CE, EPE, IST

Übung 6

Gruppenübung

G16: (Punktweise und Gleichmäßige Konvergenz)

Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x^3}, \quad x \in [0, 5]; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad x \in [0, 1]; \quad g_n(x) = \sin \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

G17: (Funktionenreihen und Differentiation)

Sei $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := -2e^{-2nx}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

gleichmäßig konvergiert und berechnen Sie die Funktion f , gegen die sie konvergiert.

b) Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe der Ableitungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$$

gleichmäßig konvergiert und berechnen Sie die Funktion g , gegen die sie konvergiert.
Gilt die Beziehung $f' = g$?

G18: (Potenzreihen)

a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + \sin n)(x - 2)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklungen um $x = 0$ für folgende Funktionen:

$$f(x) = 2^{2x^2}, \quad g(x) = \frac{x^2 + 1}{3 + 2x^2}.$$

Hausübung

H16: (Punktweise und Gleichmäßige Konvergenz)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := n^2 x(1-x)^n.$$

Zeigen Sie:

- Die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf dem Intervalle $[0, 1]$ punktweise gegen die Nullfunktion.
- Die Konvergenz in a) ist nicht gleichmäßig.
- Für jedes $a \in (0, 1)$ konvergiert die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[a, 1]$.

H17: (Funktionenreihen)

Wir betrachten die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

mit $f_n(x) = nx^{n-1}$. Zeigen Sie, daß für alle $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f_n .

H18: (Potenzreihen)

- Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} (x-2)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{3n}.$$

Wie sieht das Konvergenzverhalten auf dem Rand des jeweiligen Konvergenzintervalls aus?

- Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklungen um $x = 0$ für die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$.