



# Mathematik II für ET, WI(ET), EPE, IKT, IST, CE, SpInf

## 5. Übung

### Gruppenübung

#### G 16 Gauß-Algorithmus, Inverse

Berechnen Sie mittels des Gauß-Algorithmus die Inverse der Matrix  $A$  und bestimmen Sie anschließend die Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

#### G 17 Eigenwerte, Eigenvektoren

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

**Hinweis:** Für die Interpretation zerlegen Sie den Raum  $\mathbb{R}^4$  in geeignete Unterräume und überlegen Sie, welche geometrischen Operationen auf diesen Unterräumen ausgeführt werden.

#### G 18 Hauptachsentransformation

Wir betrachten die Matrix  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Geben Sie die quadratische Form  $Q_B(x, y, z) = (x, y, z)^T B(x, y, z)$  an.
- Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix  $T$  und eine Diagonalmatrix  $D$ , so daß  $D = T^{-1}BT$ .
- Bestimmen Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die geometrische Gestalt der Höhenlinien von  $Q_B(x, y, z) = 0$ .

## Hausübung

**H 16** Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & a \end{pmatrix}.$$

- (a) Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist der Vektor  $\vec{v} = (-3, \sqrt{3}, 0)^T$  Eigenvektor von  $A$ ?  
(b) Sei nun  $a = 2$ . Berechnen Sie alle Eigenwerte von  $A$ .

## H 17 Hauptachsentransformation

Sei  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$Q(x, y, z) = 8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4xz - 8yz.$$

- (a) Bestimmen Sie die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  so, daß  $Q(x, y, z) = (x, y, z)^T A(x, y, z)$ .  
(b) Bestimmen Sie die geometrische Gestalt der Höhenlinien für  $Q(x, y, z) = 144$  im Koordinatensystem der Hauptachsen.

## H 18 Konvergenzarten

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = e^{-nx}$ , eine Funktionenfolge.

- (a) Skizzieren Sie die Folgenglieder  $f_1$  und  $f_2$ .  
(b) Wir betrachten nun die Folge auf den Definitionsbereichen  $D_1 = [0, 2]$  und  $D_2 = [1, 2]$ . Konvergiert die Folge auf  $D_1$  oder  $D_2$ ? Wenn ja, konvergiert sie gleichmäßig oder punktweise?

## Aufgaben, die Sie ohne Hilfsmittel lösen sollten

- Skizzieren Sie:  $\ln x$ ,  $x^3$
- Bestimmen Sie:  $\int \sin x dx$ ,  $\frac{d}{dx} \arctan x$
- Stellen Sie  $\frac{1}{1-q}$ ,  $|q| < 1$ , als Reihe dar.
- Stimmen die folgenden Aussagen?
  - (a) Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
  - (b) Jede stetige Funktion ist differenzierbar.