



Mathematik II für ET, WI(ET), EPE, IKT, IST, CE, SpoInf

5. Übung

Gruppenübung

G 16 Gauß-Algorithmus, Inverse

Berechnen Sie mittels des Gauß-Algorithmus die Inverse der Matrix A und bestimmen Sie anschließend die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

G 17 Eigenwerte, Eigenvektoren

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Hinweis: Für die Interpretation zerlegen Sie den Raum \mathbb{R}^4 in geeignete Unterräume und überlegen Sie, welche geometrischen Operationen auf diesen Unterräumen ausgeführt werden.

G 18 Hauptachsentransformation

Wir betrachten die Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Geben Sie die quadratische Form $Q_B(x, y, z) = (x, y, z)^T B(x, y, z)$ an.
- Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D , so daß $D = T^{-1}BT$.
- Bestimmen Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die geometrische Gestalt der Höhenlinien von $Q_B(x, y, z) = 0$.

Hausübung

H 16 Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & a \end{pmatrix}.$$

- Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist der Vektor $\vec{v} = (-3, \sqrt{3}, 0)^T$ Eigenvektor von A ?
- Sei nun $a = 2$. Berechnen Sie alle Eigenwerte von A .

H 17 Hauptachsentransformation

Sei $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$Q(x, y, z) = 8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4xz - 8yz.$$

- Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ so, daß $Q(x, y, z) = (x, y, z)^T A(x, y, z)$.
- Bestimmen Sie die geometrische Gestalt der Höhenlinien für $Q(x, y, z) = 144$ im Koordinatensystem der Hauptachsen.

H 18 Konvergenzarten

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx}$, eine Funktionenfolge.

- Skizzieren Sie die Folgenglieder f_1 und f_2 .
- Wir betrachten nun die Folge auf den Definitionsbereichen $D_1 = [0, 2]$ und $D_2 = [1, 2]$. Konvergiert die Folge auf D_1 oder D_2 ? Wenn ja, konvergiert sie gleichmäßig oder punktweise?

Aufgaben, die Sie ohne Hilfsmittel lösen sollten

- Skizzieren Sie: $\ln x$, x^3
- Bestimmen Sie: $\int \sin x dx$, $\frac{d}{dx} \arctan x$
- Stellen Sie $\frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$, als Reihe dar.
- Stimmen die folgenden Aussagen?
 - Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
 - Jede stetige Funktion ist differenzierbar.