Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27.04.2007

Mathematik II für ET, WI(ET), EPE, IKT, IST, CE, SpoInf
2. Übung

Gruppenübung

G 4 Lineare Abbildungen und Matrizen

(a) Wir betrachten die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit ihren kanonischen Basen. Die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist bestimmt durch

$$\psi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \psi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die Matrix $A_\psi \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit

$$\psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$.

(b) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des zweiten und vierten Quadranten beschreibt. Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix, d.h., ermitteln Sie diejenige Matrix $A_\varphi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, bezüglich der

$$\varphi(x,y) = A_\varphi (x,y)^T$$

für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt.

G 5 Rang, Kern einer Matrix

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den Zeilen - und Spaltenrang von A in Abhängigkeit von λ. Welche Dimension besitzt der Kern von A (in Abhängigkeit von λ)? Geben Sie jeweils eine Basis des Kernes an.

G 6 Matrizen

(a) Finden Sie Matrizen $C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß gilt $CD \neq DC$.

(b) Gegeben seien die folgenden Matrizen A und B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+i \\ \frac{3}{i} & 4 & -1 \\ 2 & 2 & \frac{1}{i} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ i & 0 & 1+i \\ 1-i & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie BA in der Form $BA = C_1 + iC_2$, mit zwei rellen 3×3 Matrizen C_1 und C_2, dar.

Hausübung

H 4 Matrizen

Wir betrachten die Vektoren $\vec{x} = (1,4,3,1)^T$ und $\vec{y} = (2,1,-3,3)^T$ sowie die Matrizen $A = \vec{x}^T\vec{y}$ und $B = \vec{x}\vec{y}^T$.

Berechnen Sie für A und B den Spalten- und Zeilenrang. Geben Sie für die Matrix B eine Basis des Kernes an.

H 5 Abbildungsmatrix

Die Vektoren $\vec{b_1} = (1,1)^T$ und $\vec{b_2} = (2,-2)^T$ sind Basisvektoren des Raumes $\mathbb{R}^2$. Gesucht ist diejenige Matrix A, so daß für die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(x) = Ax$, gilt

$$\phi(\vec{b_1}) = \vec{e}_1, \qquad \phi(\vec{b_2}) = \vec{e}_2,$$

wobei $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ die kanonischen Basisvektoren darstellen.

Überlegen Sie (Skizze hilft!) welche der drei folgenden geometrischen Operationen durch die Abbildung ϕ ausgeführt werden: Drehung, Spiegelung, Streckung.

H 6 Orthogonalität von Vektoren

Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Untersuchen Sie diese Vektoren hinsichtlich ihrer Orthogonalität und berechnen Sie die euklidischen Normen von u_1, u_2 und u_3.

(b) Geben Sie einen Vektor u^* an, der zusammen mit zwei der Vektoren u_1, u_2 und u_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus paarweise orthogonalen Vektoren bildet.

Aufaben, die Sie ohne Hilfsmittel lösen sollten

- Skizzieren Sie: $\frac{1}{x}$, $\tan x$
- Bestimmen Sie: $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$, $\frac{d}{dx}\sin x$
- Stellen Sie den Ausdruck e^{2x} als Reihe dar.