Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Annett Keller
Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

20.04.2007

Mathematik III für ET, WI(ET), EPE, IKT, IST, CE, SpoInf
1. Übung

Gruppenübung

G 1 Lineare Abbildung

(a) Ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ 2a_1 + 3 \end{pmatrix}$ linear?

(b) Gegeben ist die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $\psi(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 + 2a_2 \end{pmatrix}$. Bestimmen und zeichnen Sie Kern ψ und Bild ψ.

(c) Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller reellen Polynome, d.h. Funktionen der Form $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Sei $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung definiert durch

$$f(p) = (p(0), p(1)),$$

wobei $p(0)$ und $p(1)$ die Werte des Polynoms an der Stelle 0 und 1 sind.
Bestimmen Sie den Kern und das Bild dieser Abbildung.

G 2 Unterräume

(a) Mit $C^2(\mathbb{R})$ wird der Vektorraum aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet. Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f, welche die folgende Gleichung erfüllen

$$f'' + 2af' + bf = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ ein Unterraum von $C^2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei nun $\mathcal{P}$ wieder der Vektorraum aller reellen Polynome. Wir betrachten die beiden Mengen

$$\mathcal{P}_1 = \{p \in \mathcal{P} : \, grad(p) \leq 3\},$$

$$\mathcal{P}_2 = \{p \in \mathcal{P} : \, p(x) = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0, \; a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Sind $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ Unterräume von $\mathcal{P}$?

G 3 Spatprodukt

(a) Berechnen Sie das Volumen der von den 3 folgenden Vektoren gebildeten Pyramide

$$\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \qquad \vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \qquad \vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Hinweis: Wie verhalten sich die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ zueinander? Das Volumen einer Pyramide berechnet sich gemäß $V = \frac{1}{3}Gh$ (G ist die Grundfläche, h ist die Höhe).

(b) Wie hängt das von den folgenden 3 Vektoren aufgespannte Spatvolumen von $x \in \mathbb{R}$ ab? Warum?

$$\vec{a} = \frac{\vec{e}_1 - \vec{e}_2}{2}, \qquad \vec{b} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \qquad \vec{c} = 2\vec{e}_2 - x\vec{e}_3$$

Hausübung

H 1 Lineare Abbildung

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 3x - y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung Φ. Ist Φ injektiv und/oder surjektiv?

H 2 Untervektorraum

Durch die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wird im Raum $\mathbb{R}^4$ der Unterraum $U =< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} >$ aufgespannt. Geben Sie die Dimension dieses Unterraumes und eine Basis an.

H 3 Untervektorraum

Gegeben seien die folgenden Mengen in $\mathbb{R}^3$:

$$A = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_\alpha = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^3 : \vec{b} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R} \right\}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ fest.}$$

(i) Zeigen Sie, daß A ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Welche Dimension kann B_α maximal besitzen? Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\dim B_\alpha = 0$ bzw. $\dim B_\alpha = 1$?

In unregelmäßigen Abständen werden wir zusätzlich zu den Hausübungen Aufgaben zur Selbstkontrolle veröffentlichen. Diese sollten Sie ohne Hilfsmittel (d.h. auch ohne Taschenrechner!) und innerhalb kürzester Zeit lösen können. Die Aufgaben sollen NICHT abgegeben werden.

- Skizzieren Sie: e^{-x}, $\cos x$
- Bestimmen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\sin \pi$, $\frac{d}{dx} \ln x$
- Konvergieren die folgenden Reihen? Wenn ja, geben Sie den Grenzwert an.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \; x \in \mathbb{R}$$