Fachbereich Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 18.07.2007

Semestralklausur Mathematik II für Sportinformatik

Bitte in Druckschrift deutlich lesbar ausfüllen:

Name: .... Vorname: ....

Matrikel-Nr.: .... Fachrichtung: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Erreichbare Punkte	11	9	10	8	12	50
Erreichte Punkte						

Hinweis: Es wird nicht nur das Endergebnis, sondern auch die Argumentation bewertet. Die Angabe von Zwischenergebnissen und kurzen Begründungen für den Lösungsweg ist daher erforderlich.

Aufgabe 1
Gegeben sei das folgende Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 \qquad + 10x_3 &= \alpha \\ -4x_1 + 4x_2 - 20x_3 &= \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen? **(5 Punkte)**

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems in Abhähgigkeit von α, β. **(5 Punkte)**

(c) Liegt der Vektor $\vec{v} = (10, 0, -2)^T$ im Kern von A? **(1 Punkte)**

Aufgabe 2
Geben Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) = e^{x-y} \sin(x + y),$$

das Taylorpolynom 1. Grades $T_1(x, y)$ mit Entwicklungspunkt $(0, 0)$ an. **(3 Punkte)**
Berechnen Sie das zugehörige Restglied. **(6 Punkte)**

Aufgabe 3

(a) Gegeben sei die Funktion
$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$
Bestimmen Sie den Typ der Extrema von f. **(3 Punkte)**

(b) Bestimmen Sie die Punkte auf der Kurve $x^6 + y^6 = 1$ mit dem größten bzw. kleinsten Abstand $(\sqrt{x^2 + y^2})$ zum Ursprung $(0, 0)$. **(7 Punkte)**

Aufgabe 4

Es sei W der Weg von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$, der sich aus dem durch $X(t) = (t^2, t)$ mit $t \in [0, 1]$ parametrisierten Weg W_1 und dem Geradenstück W_2 von $(1, 1)$ nach $(1, 0)$ zusammensetzt.
Berechnen Sie das Kurvenintegral
$$\int_W F \cdot dX$$
für das Vektorfeld
$$F(x, y) = (2xy - x^2,\ x + y^2).$$

Aufgabe 5
Sei $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$Q(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß $Q(x, y) = (x, y)^T A(x, y)$ gilt. **(2 Punkte)**

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A. **(7 Punkte)**

(c) Welche geometrische Gestalt besitzt die Höhenlinie für $Q(x, y) = 9$ im Koordinatensystem der Hauptachsen? **(3 Punkte)**