Hausübung

H 40 (***Ferienübung:*** *Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren*)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie mit dem Startvektor $x^{(0)} = (-6, -6)^T$ jeweils drei Schritte des Jacobi-, des Gauß-Seidel-, und des SOR-Verfahrens ($\omega = 1.5$) aus.

b) Erstellen Sie eine Skizze, die die beiden Gleichungen des Systems als Geraden interpretiert (die exakte Lösung lautet $x^* = (3.\overline{6}, 2.\overline{3})^T$) und ergänzen Sie die Skizze um die Iterationsfolgen

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Gauß-Seidel- bzw. SOR-Verfahrens und

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Jacobi-Verfahrens.

a) *Die Zerlegung der Matrix A in $D - L - U$ ergibt für das* **Jacobi-Verfahren** *die Iterationsvorschrift*

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Iterationsfolge

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -2.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Das **Gauß-Seidel-Verfahren** *ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b) \\ x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{5}(9 + 4x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{2}(1 + x_1^{(k+1)}) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Iterationsfolge

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

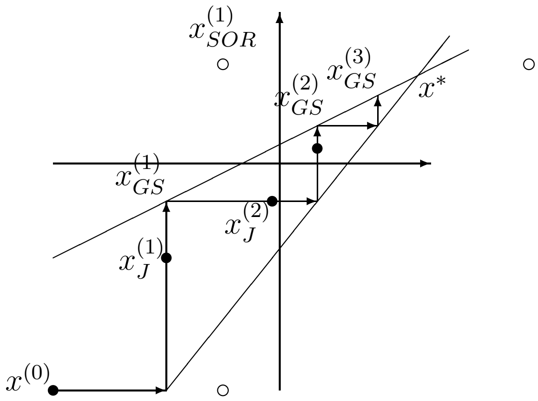
Das **SOR-Verfahren** *ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \omega D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b) + (1-\omega)x^{(k)} \\ x_1^{(k+1)} &= 1.5\tfrac{1}{5}(9 + 4x_2^{(k)}) - 0.5x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 1.5\tfrac{1}{2}(1 + x_1^{(k+1)}) - 0.5x_2^{(k)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Iterationsfolge

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1.5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1.5 \\ 2.625 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6.6 \\ 2.625 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

b) *Die graphische Darstellung ergibt*



H 41 (***Ferienübung:*** *Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren*)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie für das Gleichungssystem $Ax = b$ jeweils die Gleichungen zur Berechnung von $x^{(k+1)}$ auf unter Verwendung

- des Gesamtschrittverfahrens (Jacobi),
- des Einzelschrittverfahrens (Gauß-Seidel),
- des SOR-Verfahrens.

b) Verwenden Sie den Startvektor $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ und berechnen Sie mit jedem der drei Verfahren $x^{(2)}$ ($\omega = 1.14589$ im Falle des SOR-Verfahrens). Bestimmen Sie die Fehler $\|x^{(2)} - x^*\|_2$.

Die Zerlegung von A ist gegeben durch

$$A = D + L + U = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \\ 1 & & \\ 1 & 1 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & 1 & 1 \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

a)

- *Gesamtschrittverfahren:* $x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)})$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(6 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(0 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(4 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{aligned}$$

- *Einzelschrittverfahren:* $x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)})$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(6 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(0 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(4 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) \end{aligned}$$

- *SOR-Verfahren:* $x^{(k+1)} = \omega D^{-1}(b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)}) + (1-\omega)x^{(k)}$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (1-\omega)x_1^{(k)} + \tfrac{\omega}{3}(6 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= (1-\omega)x_2^{(k)} + \tfrac{\omega}{3}(0 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= (1-\omega)x_3^{(k)} + \tfrac{\omega}{3}(4 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) \end{aligned}$$

b) Die exakte Lösung des LGS ist $x^* = (2, -1, 1)^T$. *Für die Verfahren ergibt sich*

- *Gesamtschrittverfahren:*
  $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, $x^{(1)} = (2, 0, \frac{4}{3})^T$ *und* $x^{(2)} = (\frac{14}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{2}{3})^T$.
  Damit ist $\|x^{(2)} - x^*\|_2 = 0.5665$.
- *Einzelschrittverfahren:*
  $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, $x^{(1)} = (2, -\frac{2}{3}, \frac{8}{9})^T$ *und* $x^{(2)} = (\frac{52}{27}, -\frac{76}{81}, \frac{244}{243})^T$.
  Damit ist $\|x^{(2)} - x^*\|_2 = 0.0974$.
- *SOR-Verfahren:*
  $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, $x^{(1)} = (2.291, -0.875, 0.987)^T$
  und $x^{(2)} = (1.915, -0.981, 1.027)^T$.
  Damit ist $\|x^{(2)} - x^*\|_2 = 0.0911$.