

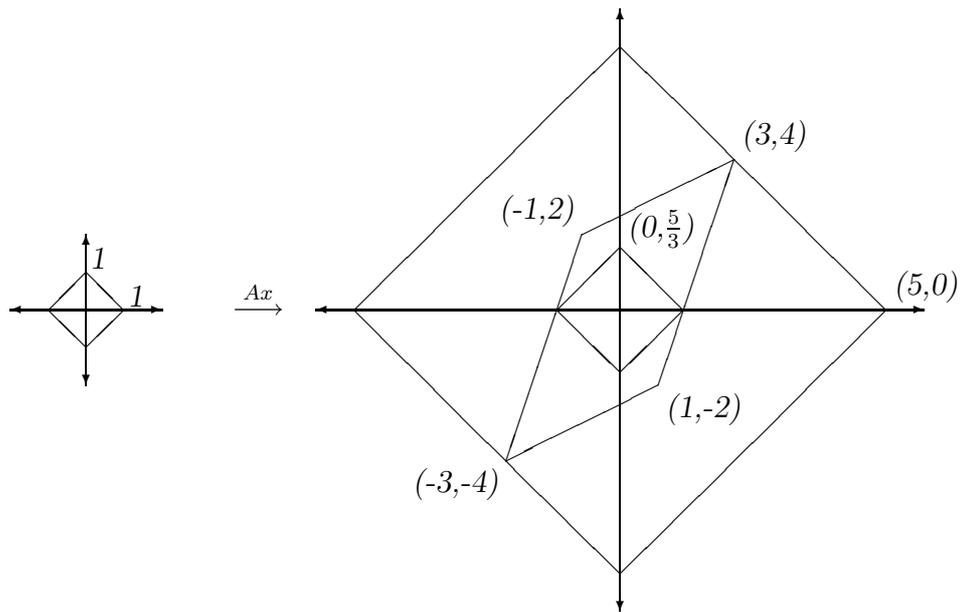
Hausübung

H 37 (Abschätzung der Konditionszahl)

Skizzieren Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

die Menge $\{Ax \mid \|x\|_1 = 1\}$. Wie lautet die Konditionszahl $\text{cond}_{\|\cdot\|_1}(A)$?



Damit ergibt sich die Konditionszahl wieder aus der umschreibenden Sphäre und der einbeschriebenen Sphäre als der Quotient

$$\text{cond}_{\|\cdot\|_1}(A) = \frac{7}{\frac{5}{3}} = 4.2$$

H 38 (Sensitivität linearer Gleichungssysteme)

Wir betrachten die Matrix A und die rechte Seite b

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Konditionszahl $\text{cond}_{\|\cdot\|_1}(A)$.
- b) Schätzen Sie den relativen Fehler $\frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1}$ der Lösung ab, wenn $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ mit

$$\|\tilde{A} - A\|_1 \leq 0.02, \quad \|\tilde{b} - b\|_1 \leq 0.002 \quad \text{ist.}$$

- c) Berechnen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$

d) und berechnen Sie die Lösung des gestörten Gleichungssystems $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4.99 & 8.01 \\ 3.01 & 4.99 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2.999 \\ 2.001 \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie den tatsächlich berechneten relativen Fehler mit der in Teilaufgabe a) berechneten Abschätzung des relativen Fehlers.

a) Es ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

und daher gilt

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max\{5 + 3, 8 + 5\} = 13 \\ \|A^{-1}\|_1 &= \max\{5 + 3, 8 + 5\} = 13 \\ \text{cond}_{\|\cdot\|_1}(A) &= \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 13 \cdot 13 = 169. \end{aligned}$$

b) Nach der Fehlerformel aus der Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1} &\leq \text{cond}_{\|\cdot\|_1}(A) \left(\frac{\|\tilde{b} - b\|_1}{\|b\|_1} + \frac{\|\tilde{A} - A\|_1}{\|A\|_1} \right) \frac{1}{1 - \text{cond}_{\|\cdot\|_1}(A) \frac{\|\tilde{A} - A\|_1}{\|A\|_1}} \\ &= 169 \cdot \left(\frac{0.002}{5} + \frac{0.02}{13} \right) \cdot \frac{1}{1 - 169 \cdot \frac{0.02}{13}} \\ &\leq 0.4427 \end{aligned}$$

c) Exakte Lösung von $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 8 & 3 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \longrightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Lösung von $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$:

$$\begin{pmatrix} 4.99 & 8.01 \\ 3.01 & 4.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.999 \\ 2.001 \end{pmatrix}$$

mit Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4.99 & 8.01 & 2.999 \\ 3.01 & 4.99 & 2.001 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4.99 & 8.01 & 2.999 \\ 0 & 0.1583 & 0.1920 \end{array} \right] \longrightarrow x = \begin{pmatrix} -1.3456 \\ 1.2127 \end{pmatrix}$$

Der exakte relative Fehler ist also

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1} = \frac{0.3456 + 0.2127}{2} = 0.279$$

Die Abschätzung aus Teil b) war in diesem Fall also ca. um den Faktor 1.6 zu pessimistisch. Genauer kann man jedoch nicht abschätzen, da der Fehler in anderen Fällen durchaus auch schlechter als in diesem Fall sein kann.

H 39 (Abschätzung der Konditionszahl)

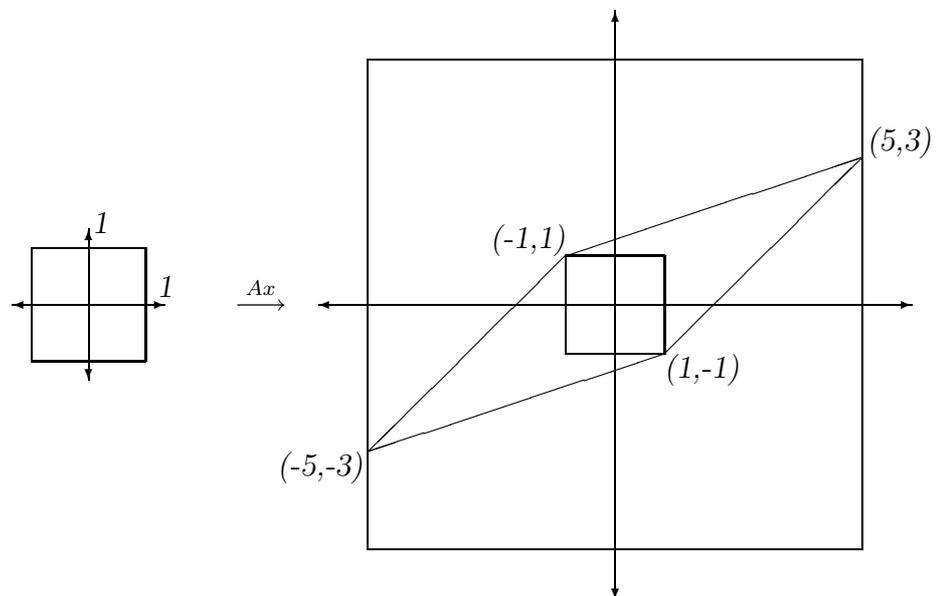
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Skizzieren Sie die Menge $\{Ax \mid \|x\|_\infty = 1\}$.
- b) Berechnen Sie die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der ∞ -Norm.
- c) Veranschaulichen Sie diese Konditionszahl anhand der Skizze aus Aufgabenteil a) und unter Verwendung von

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \quad \text{bzw.} \quad \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\min_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}.$$

a)



b) Die Inverse zu A ist gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt die Berechnung der Konditionszahl

$$\begin{aligned} \text{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A) &= \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty \\ &= 5 \cdot 1 = 5 \left(= \frac{5}{1}\right). \end{aligned}$$

c) Mit dem Hinweis kommt man zu dem Zusammenhang

$$\text{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \frac{\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}{\min_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}.$$

Damit ist die Konditionszahl direkt aus der Skizze ablesbar als Quotient aus der Größe der umschreibenden Sphäre und der einbeschriebenen Sphäre.

$$\left. \begin{array}{l} \text{umschreibend:} \quad \{x \mid \|x\|_\infty = 5\} \\ \text{einbeschrieben:} \quad \{x \mid \|x\|_\infty = 1\} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A) = \frac{5}{1} = 5.$$

Oder in anderen Worten, als der Quotient aus den ∞ -Normen der Punkte mit dem größten Abstand zum Nullpunkt und dem Punkt mit dem kleinsten Abstand zum Nullpunkt, jeweils gemessen in der ∞ -Norm.