Hausübung

H 31 Lösen Sie das Gleichungssystem $A\,x = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

durch Anwendung des Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung. Interpretieren Sie das Ergebnis als Zerlegung der Form $PA = LR$.

1	1	-2	1	-4	*Zeilentausch I gegen III*
2	1	1	4	-1	
3	3^*	1	-1	6	$*$ = *Spaltenpivot*
3	3	1	-1	6	
2	1	1	4	-1	$II = II - \frac{1}{3}I$
1	1	-2	1	-4	$III = III - \frac{1}{3}I$
3	3	1	-1	6	
2	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	-3	*Zeilentausch II gegen III*
1	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$(-\frac{7}{3})^*$	$\frac{4}{3}$	-6	$*$ = *Spaltenpivot*
3	3	1	-1	6	
1	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	-6	
2	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	-3	$III = III - (-\frac{2}{7})II$
3	3	1	-1	6	$\Rightarrow x_1 = (6 + x_3 - x_2) : 3 = 1$
1	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	-6	$\Rightarrow x_2 = (-6 - \frac{4}{3}x_3) : (-\frac{7}{3}) = 2$
2	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$-\mathbf{\frac{2}{7}}$	$\frac{33}{7}$	$-\frac{33}{7}$	$\Rightarrow x_3 = (-\frac{33}{7}) : (\frac{33}{7}) = -1$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{33}{7} \end{pmatrix}.$$

H 32 Berechnen Sie die Inverse der folgenden oberen Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 12 \\ & 2 & -6 & -12 \\ & & 3 & 24 \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie die Invertierung der Matrix auf eine Weise, bei der nur der „Speicherplatz“ der Matrix R verwendet wird.

Hinweis: Berechnen Sie die Lösungen der Gleichungssysteme

$$R\,x = e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

für die Einheitsvektoren $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$.
Diese Lösungen bilden die Spalten der inversen Matrix. Berechnet man zunächst den Fall $i = n$, dann $i = n - 1$ usw., so stellt man fest, daß man die Ergebnisse auch platzsparend „speichern“ kann.

Um die Matrix zu invertieren, werden im folgenden, wie im Hinweis zu der Aufgabe erläutert, die Lösungen zu den Einheitsvektoren auf der rechten Seite ermittelt. Diese Lösungen bilden die Spalten der inversen Matrix. Da für $j > i$ die i-te Spalte von R^{-1} nicht von der j-ten Spalte von R abhängt, kann man zunächst den Fall $i = n$ berechnen und dann die n-te Spalte von R „vergessen“. Man kann also R durch R^{-1} sukzessive von rechts und dabei jede Spalte sukzessive „von unten nach oben “ überschreiben.

1	2	6	12	0	$\Rightarrow x_1 = 36$
	2	-6	-12	0	$\Rightarrow x_2 = -9$
		3	24	0	$\Rightarrow x_3 = -4$
			2	1	$\Rightarrow x_4 = \frac{1}{2}$

1	2	6	$\mathbf{36}$	0	$\Rightarrow x_1 = -4$
	2	-6	$\mathbf{-9}$	0	$\Rightarrow x_2 = 1$
		3	$\mathbf{-4}$	1	$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{3}$
			$\mathbf{\frac{1}{2}}$	0	$\Rightarrow x_4 = 0$

1	2	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{36}$	0	$\Rightarrow x_1 = -1$
	2	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-9}$	1	$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$
		$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{-4}$	0	$\Rightarrow x_3 = 0$
			$\mathbf{\frac{1}{2}}$	0	$\Rightarrow x_4 = 0$

1	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{36}$	1	$\Rightarrow x_1 = 1$
	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-9}$	0	$\Rightarrow x_2 = 0$
		$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{-4}$	0	$\Rightarrow x_3 = 0$
			$\mathbf{\frac{1}{2}}$	0	$\Rightarrow x_4 = 0$

$\mathbf{1}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{36}$		
	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-9}$		
		$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{-4}$		
			$\mathbf{\frac{1}{2}}$		

Die inverse Matrix ist

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 36 \\ & \frac{1}{2} & 1 & -9 \\ & & \frac{1}{3} & -4 \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

H 33 Gegeben ist das Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Das System $A\,x = b$ ist sehr empfindlich bei der Durchführung des Gauß-Algorithmus gegenüber Rundungsfehlern. Dabei ist die Pivotisierungsstrategie von entscheidender Bedeutung für die Güte der Lösung. Lösen Sie das System unter Verwendung einer fünfstelligen, dezimalen Gleitpunktarithmetik (Rechnen mit 5 signifikanten Stellen). Benutzen Sie dabei den Gauß-Algorithmus

a) mit Spaltenpivotisierung,

b) ohne Pivotisierung.

Hinweis: Es ist praktisch, die wissenschaftliche Zahlendarstellung mit 4-stelliger Mantisse zu benutzen. Zum Beispiel

$$\begin{array}{rcccl} 1234,567 & \longrightarrow & 1,234567 \cdot 10^{3} & \longrightarrow & \texttt{1.2345E+3} \\ 3,141759 & \longrightarrow & 3,141759 \cdot 10^{0} & \longrightarrow & \texttt{3.1417E+0} \\ 0,000654321 & \longrightarrow & 6,54321 \cdot 10^{-4} & \longrightarrow & \texttt{6.5432E-4}. \end{array}$$

Bringen Sie **jedes** Zwischenergebnis auf diese Form, und schneiden Sie die hinteren Stellen der Zahldarstellungen ab. (Achtung !! Taschenrechner rechnen oft intern mit höherer Genauigkeit als die Anzeige vortäuscht!)

a) *Gauß mit Spaltenpivotisierung:*

1	1.0000E+1	-7.0000E+0	0.0000E+0	7.0000E+0	
2	-3.0000E+0	2.0990E+0	6.0000E+0	3.9010E+0	$II = II - ($-0.3000E+0$)I$
3	5.0000E+0	-1.0000E+0	5.0000E+0	6.0000E+0	$III = III - ($0.5000E+0$)I$
1	1.0000E+1	-7.0000E+0	0.0000E+0	7.0000E+0	
2		-1.0000E-3	6.0000E+0	6.0010E+0	Zeilentausch II gegen III
3		2.5000E+0*	5.0000E+0	2.5000E+0	$*$ = Spaltenpivot
1	1.0000E+1	-7.0000E+0	0.0000E+0	7.0000E+0	
3		2.5000E+0	5.0000E+0	2.5000E+0	
2		-1.0000E-3	6.0000E+0	6.0010E+0	$III = III - ($-4.0000E-4$)II$
1	1.0000E+1	-7.0000E+0	0.0000E+0	7.0000E+0	
3		2.5000E+0	5.0000E+0	2.5000E+0	
2			6.0020E+0	6.0020E+0	

$$\Rightarrow \quad x_3 = \frac{\texttt{6.0020E+0}}{\texttt{6.0020E+0}} = \texttt{1.0000E+0}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = (\texttt{2.5000E+0} - \texttt{5.0000E+0})/(\texttt{2.5000E+0}) = \texttt{-1.0000E+0}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = (\texttt{7.0000E+0} - \texttt{7.0000E+0})/\texttt{1.0000E+1} = \texttt{0.0000E+0}$$

Man erhält also den Lösungsvektor $(0, -1, 1)^T$*, welcher das Gleichungssystem auch wirklich exakt löst. Dies kann man überprüfen, indem man* $A\,x$ *berechnet.*

b) *Gauß ohne Pivotisierung:*

1	1.0000E+1	-7.0000E+0	0.0000E+0	7.0000E+0	
2	-3.0000E+0	2.0990E+0	6.0000E+0	3.9010E+0	$II = II - (\texttt{-0.3000E+0}) I$
3	5.0000E+0	-1.0000E+0	5.0000E+0	6.0000E+0	$III = III - (\texttt{0.5000E+0}) I$
1	1.0000E+1	-7.0000E+0	0.0000E+0	7.0000E+0	
2		-1.0000E-3	6.0000E+0	6.0010E+0	
3		2.5000E+0	5.0000E+0	2.5000E+0	$III = III - (\texttt{-2.5000E+3}) II$
1	1.0000E+1	-7.0000E+0	0.0000E+0	7.0000E+0	
2		-1.0000E-3	6.0000E+0	6.0010E+0	
3			1.5005E+4	1.5004E+4	

Die letzte Zeile ergibt sich durch die beiden Rechnungen:

$$\texttt{5.0000E+0} + \texttt{2.5000E+3} \cdot \texttt{6.0000E+0} = \texttt{5.0000E+0} + \texttt{1.5000E+4} = \texttt{1.5005E+4}$$

$$\texttt{2.5000E+0} + \texttt{2.5000E+3} \cdot \texttt{6.0010E+0} = \texttt{2.5000E+0} + \texttt{1.5002E+4} = \texttt{1.5004E+4}$$

Somit erhält man das Ergbnis:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad x_3 &= \frac{\texttt{1.5004E+4}}{\texttt{1.5005E+4}} = \texttt{0.99993} = \texttt{9.9993E-1} \\
\Rightarrow \quad x_2 &= (\texttt{6.0010E+0} - \texttt{5.9995E+0})/(\texttt{-1.0000E-3}) = \texttt{-1.5000E+0} \\
\Rightarrow \quad x_1 &= (\texttt{7.0000E+0} - \texttt{1.5000E+1})/\texttt{1.0000E+1} = \texttt{-3.5000E-1}
\end{aligned}$$

Obwohl hier nicht viele Rechenschritte mit Rundungsfehlern gemacht werden, erhält man ein falsches Ergebnis. Die exakte Lösung der Gleichung $A\,x = b$ ist $(0, -1, 1)^T$, errechnet wurde jedoch $(-0.35, -1.5, 0.99993)^T$. Das Problem ergibt sich aus dem kleinen Pivotwert im zweiten Schritt der Rechnung.
An diesem Beispiel erkennt man, wie wichtig die Pivotisierung für die Berechnung des Gauß-Algorithmus ist.