Hausübung

H 28 Die Symmetrie hat für numerische Verfahren eine große Bedeutung. Ähnlich zu den Quadraturen bringt die Symmetrie auch in den Differenzenquotienten jeweils eine Ordnung mehr. Bei einem nichtäquidistanten Gitter geht die Symmetrie verloren. Zeigen Sie, dass

$$u_i'' \approx 2\,\frac{h_{i+1}u_{i-1} - (h_i + h_{i+1})u_i + h_i u_{i+1}}{h_i\,h_{i+1}\,(h_i + h_{i+1})}, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$$

nur noch eine Approximation erster Ordnung darstellt.

Taylorentwicklung der beiden Terme $u_{i\pm 1}$ führt auf

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= u_i - h_i u_i' + \frac{h_i^2}{2}u_i'' - \frac{h_i^3}{6}u_i''' + \mathcal{O}(h_i^4) \\ u_{i+1} &= u_i + h_{i+1}u_i' + \frac{h_{i+1}^2}{2}u_i'' + \frac{h_{i+1}^3}{6}u_i''' + \mathcal{O}(h_{i+1}^4) \end{aligned}$$

Setzt man diese beiden Entwicklungen in den Term auf der rechten Seite ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{h_i\,h_{i+1}\,(h_i + h_{i+1})}\left[u_i''\,h_i\,h_{i+1}\frac{h_i + h_{i+1}}{2} + u_i'''\,h_i\,h_{i+1}\frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{6} + \mathcal{O}\Big(\max\{h_i, h_{i+1}\}^5\Big)\right] \\ &\qquad = u_i'' + \frac{h_{i+1} - h_i}{3}u_i''' + \mathcal{O}\Big(\max\{h_i, h_{i+1}\}^2\Big) \end{aligned}$$

Es bleibt also ein Term erster Ordnung übrig. Für ein äquidistantes Gitter gilt $h_i = h_{i+1}$ und damit würde der Term erster Ordnung wegfallen. Es entsteht der bekannte zentrale Differenzenquotient zweiter Ordnung.

H 29 Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' - (1 + x^2)yy' &= 1, \ x \in [0,1] \quad \text{mit} \\ y(0) - \tfrac{1}{2}y'(0) &= 0, \\ y'(1) &= 1. \end{aligned}$$

Diskretisieren Sie das RWP mit dem Differenzenverfahren 2. Ordnung auf einem Gitter mit $h = \frac{1}{3}$. Stellen Sie die Gleichungen explizit auf und eliminieren Sie die fiktiven Knoten.

Hinweis: Fiktive Knoten werden verwendet, um die Ableitungen am Rand von 2. Ordnung zu approximieren.

Bei dem Differenzenverfahren 2. Ordnung werden die Differenzenquotienten

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + \mathcal{O}(h^2)$$

und

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) + \mathcal{O}(h^2)$$

verwendet. Die Knoten des Gitters für $h = \frac{1}{3}$ *liegen bei*

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad x_3 = 1.$$

Um die Randableitungen von zweiter Ordnung zu approximieren, werden zusätzlich die fiktiven Knoten

$$x_{-1} = -\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad x_4 = \frac{4}{3}$$

benötigt. Aus der Randbedingung und der Randableitung für $x = 0$ *ergibt sich die Gleichung*

$$y_0 - \frac{3}{4}(y_1 - y_{-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{-1} = y_1 - \frac{4}{3}y_0.$$

Durch die Diskretisierung der DGL erhalten wir

$$\begin{aligned}
9(y_1 - 2y_0 + y_{-1}) - \tfrac{3}{2}(y_1 - y_{-1})y_0 - 1 &= 0,\\
9(y_2 - 2y_1 + y_0) - \tfrac{5}{3}(y_2 - y_0)y_1 - 1 &= 0,\\
9(y_3 - 2y_2 + y_1) - \tfrac{13}{6}(y_3 - y_1)y_2 - 1 &= 0,\\
9(y_4 - 2y_3 + y_2) - 3(y_4 - y_2)y_3 - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Aus der Randableitung und der Randbedingung in $x = 1$ *ergibt sich*

$$\frac{3}{2}(y_4 - y_2) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_4 = \frac{2}{3} + y_2.$$

Aus diesem System von sechs Gleichungen für sechs Unbekannte kann man durch Elimination von y_{-1} *und* y_4 *ein System mit vier Gleichungen und vier Unbekannten machen:*

$$\begin{aligned}
18y_1 - 30y_0 - 2y_0^2 - 1 &= 0,\\
9y_2 - 18y_1 + 9y_0 - \tfrac{5}{3}y_2y_1 + \tfrac{5}{3}y_0y_1 - 1 &= 0,\\
9y_3 - 18y_2 + 9y_1 - \tfrac{13}{6}y_3y_2 + \tfrac{13}{6}y_1y_2 - 1 &= 0,\\
-18y_3 + 18y_2 - 2y_3 + 5 &= 0.
\end{aligned}$$

Hinweis:

Bei dieser Differentialgleichung wäre es sinnvoller gewesen, $y(x_i)y'(x_i) = \frac{1}{2}(y(x_i)^2)'$ *durch*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2h}(y(x_{i+1})^2 - y(x_{i-1})^2)$$

zu approximieren, da die obige Diskretisierung zu unphysikalischen Ergebnissen führt. Der mathematische Grund hierfür ist, dass die Jacobimatrix der obigen Diskretisierung keine sinnvollen Matrix-Eigenschaften aufweist. Die Jacobimatrix, die sich aus der hier im Hinweis vorgeschlagenen Diskretisierung ergibt, ist für kleines h *eine M-Matrix. Siehe hierzu Kapitel 7 zum Thema Matrixeigenschaften.*

H 30 Gegeben sei die Randwertaufgabe in selbstadjungierter Form

$$-((1+x^2)y')' + y = 0, \ x \in [0,1] \quad \text{mit} \quad y(0) = y(1) = 1.$$

a) Diskretisieren Sie das RWP nach der symmetrischen Diskretisierung für selbstadjungierte Probleme mit der Schrittweite $h = \frac{1}{4}$.

b) Differenzieren Sie die selbstadjungierte Gleichung aus und diskretisieren Sie das RWP nach der Standardmethode mit der Schrittweite $h = \frac{1}{4}$.

a) *Bei der symm. Diskretisierung für selbstadjungierte Probleme wird $-((1+x^2)y')'$ in zwei Schritten symmetrisch approximiert. Das Resultat ist*

$$-\frac{1}{h^2}\left((1+(x_i+\frac{h}{2})^2)(y_{i+1}-y_i) - (1+(x_i-\frac{h}{2})^2)(y_i-y_{i-1})\right) + y_i = 0$$

mit $i = 1,2,3$ und $y_0 = y_4 = 1$.
Benötigt werden die Zahlenwerte

x_i	$x_i \pm \frac{h}{2}$	$\frac{1+(x_i\pm\frac{h}{2})^2}{h^2}$
0.25	0.125	16.25
0.5	0.375	18.25
0.75	0.625	22.25
	0.875	28.25

Sortiert man in den einzelnen Gleichungen nach y_i und bringt die Randwerte auf die rechte Seite, so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 35.5 & -18.25 & 0 \\ -18.25 & 41.5 & -22.25 \\ 0 & -22.25 & 51.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.25 \\ 0 \\ 28.25 \end{pmatrix}.$$

b) *Nach dem Ausdifferenzieren lautet die DGL*

$$-(1+x^2)y'' - 2xy' + y = 0.$$

Die erste und zweite Ableitung werden durch die jeweiligen zentralen Differenzenquotienten approximiert und es ergibt sich

$$-\frac{1+x_i^2}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) - \frac{2x_i}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) + y_i = 0$$

mit $i = 1,2,3$ und $y_0 = y_4 = 1$. Benötigt werden nun die Zahlenwerte

x_i	$\frac{1+(x_i)^2}{h^2}$	$\frac{x_i}{h}$
0.25	17	1
0.5	20	2
0.75	25	3

Sortiert man in den einzelnen Gleichungen wieder nach y_i und bringt die Randwerte auf die rechte Seite, so ergibt sich jetzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 35 & -18 & 0 \\ -18 & 41 & -22 \\ 0 & -22 & 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}.$$