Hausübung

H 25 Verifizieren Sie, daß die Stabilitätsfunktion des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung durch das Polynom

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$$

gegeben ist.

Die Verfahrensvorschrift des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung ist gegeben durch das Butcher-Array

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}k_2) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \\ y_{i+1} &= y_i + h(\tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{3}k_2 + \tfrac{1}{3}k_3 + \tfrac{1}{6}k_4). \end{aligned}$$

Wendet man dieses Verfahren auf die Testgleichung

$$y' = \lambda y$$

an, so erhält man

$$\begin{array}{rcl c l} k_1(\lambda) &=& & = & \lambda y_i \\ k_2(\lambda) &=& \lambda(y_i + \frac{h}{2}k_1) & = & \lambda y_i + \frac{h}{2}\lambda^2 y_i \\ k_3(\lambda) &=& \lambda(y_i + \frac{h}{2}k_2) & = & \lambda y_i + \frac{h}{2}\lambda^2 y_i + \frac{h^2}{4}\lambda^3 y_i \\ k_4(\lambda) &=& \lambda(y_i + hk_3) & = & \lambda y_i + h\lambda^2 y_i + \frac{h^2}{2}\lambda^3 y_i + \frac{h^3}{4}\lambda^4 y_i \\ y_{i+1} &=& y_i + h(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4) & = & (1 + (\lambda h) + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3 + \frac{1}{24}(\lambda h)^4)y_i. \end{array}$$

Damit lautet die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4.$$

H 26 Die Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^3$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 60 & -120 & 1 \\ 0.1 & 1 & -10000 \end{bmatrix}$$

soll mit dem expliziten Eulerverfahren integriert werden. Wie groß kann die Diskretisierungsschrittweite h gewählt werden, wenn bei beliebigem $y_0 = y_0^h$ die Bedingung $y_i \to 0$ für $i \to \infty$ mit $h > 0$ erfüllt sein soll? Begründen Sie Ihre Wahl.

Die Untersuchung der Gerschgorin-Kreise von A und A^T liefert, dass es drei verschiedene Eigenwerte gibt, die folglich auch reell sein müssen. Die Intervalle auf der reellen Achse sind $[-2, 0]$, $[-122, -118]$ *und* $[-10001, -9999]$. *Sie liegen alle in der negativen komplexen Halbebene.*

Der Betrag des größten Eigenwertes lässt sich durch 10001 *abschätzen. Die Stabilitätsfunktion des expliziten Euler-Verfahrens ist $g(h\lambda) = 1 + h\lambda$ und die Stabilitätsbedingung ist daher $h < \frac{2}{|\lambda|}$ und durch die Wahl*

$$h < \frac{2}{10001} \approx 0,00019998$$

können wir die oben genannte Bedingung erfüllen und das korrekte Verhalten sicherstellen.

H 27 **a)** Schreiben Sie ein Matlab-Programm zu dem folgenden eingebetteten Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2,3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \tilde{\gamma}_i & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$$

mit Schrittweitensteuerung, wie sie im Skript beschrieben ist.

b) Verwenden Sie das Programm, um das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= -200xy^2 \\ y(-3) &= \frac{1}{901} \end{aligned}$$

auf dem Intervall $[-3, 0]$ mit `TOL` $= 0.001$ zu berechnen.

c) Berechnen Sie die exakte Lösung und vergleichen Sie diese mit der numerischen Lösung aus b).

a)+b) *Das Programm wird ins Netz gestellt.*

c) *Die exakte Lösung kann mittels Trennung der Variablen berechnet werden. Mit $x_0 = -3$, $x_E = 0$ sowie $y_0 = y(-3)$ und $y_E = y(0)$ erhält man*

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_E} \frac{1}{y^2} dy &= \int_{x_0}^{x_E} -200x dx \\ -\frac{1}{y_E} + \frac{1}{y_0} &= -100x_E^2 + 100x_0^2 \\ y_E &= \frac{1}{\frac{1}{y_0} + 100x_E^2 - 100x_0^2} \\ &= \frac{1}{901 + 100x_E^2 - 900x_0^2} \\ &= \frac{1}{1 + 100x_E^2} \end{aligned}$$

Somit ist die exakte Lösung $y_E = y(0) = 1$.