Hausübung

H 15 Es sei das Gebiet

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

gegeben. Wieviele Knoten werden mindestens benötigt, um das Integral

$$\int_D p(x, y) \ d(x, y)$$

zu einem allgemeinen Polynom vom Grad 5

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{5} \sum_{j=0}^{5-i} a_{ij} x^i y^j$$

über dem Gebiet D durch iterierte Anwendung der Gauß-Quadratur exakt zu berechnen?

Die Aufteilung in ein Doppelintegral ergibt

$$\int_D p(x, y) \ d(x, y) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} p(x, y) \ dy \right) dx.$$

Das innere Integral ist ein Integral über ein Polynom vom Grad 5 in y. Damit sind in y-Richtung 3 Knoten ($n = 2$) nötig um das Integral exakt zu bestimmen. Durch diese exakte Integration ist der Integrand $P(x)$ des äußeren Integrals

$$\int_0^1 P(x) dx$$

ein Polynom 12. Grades in x, da bei der inneren Integration $1 - x^2$ als Integralrand in ein Polynom vom Grad 6 eingesetzt wird.
Ein Polynom 12. Grades benötigt 7 Knoten ($n = 6$), um mit Gauß exakt integriert zu werden, (Ordnung: $2n + 2$, Polynome vom Grad 13 werden auch exakt integriert, aber weniger Knoten reichen nicht). Somit brauchen wir 7 Knoten in x-Richtung für jedes y. Das gibt eine insgesamte Knotenanzahl von $3 \cdot 7 = 21$.

H 16 Berechnung einer Nicht-Standard-Quadratur-Formel zu einem gewichteten Integral:
Berechnen Sie A, B, C so, dass die folgende Quadraturformel das gewichtete Integral

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \ dx = Af(0) + Bf(\frac{1}{2}) + Cf(1)$$

exakt berechnet für $f \in \Pi_2$.

Damit die Quadraturformel von der Ordnung mindestens 3 ist, muss sie für alle Polynome vom Grad höchstens 2 exakt sein. Da die Polynome $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x$ *und* $p_2(x) = x^2$ *eine Basis von* Π_2 *bilden, ist es ausreichend, die Exaktheit nur für diese Polynome zu zeigen:*

$$\begin{array}{rcccccccc} \int_0^1 \sqrt{x}\cdot 1\ dx & = & \frac{2}{3} & = & A & + & B & + & C, \\ \int_0^1 \sqrt{x}\cdot x\ dx & = & \frac{2}{5} & = & 0 & + & \frac{1}{2}B & + & C, \\ \int_0^1 \sqrt{x}\cdot x^2\ dx & = & \frac{2}{7} & = & 0 & + & \frac{1}{4}B & + & C. \end{array}$$

Als Lösung des Systems erhält man $A = \frac{4}{105} = 0.0381$, $B = \frac{16}{35} = 0.4571$ *und* $C = \frac{6}{35} = 0.1714$ *und damit*

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\ dx = \frac{1}{35}[\frac{4}{3}f(0) + 16f(\frac{1}{2}) + 6f(1)].$$

H 17 Man berechne

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

durch eine 2-dimensionale Trapezregel. Dazu lege man ein Gitter durch das Gebiet mit n Maschen in jeder Richtung und approximiere

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

durch die Auswertungen an den Eckpunkten. Wie sieht die allgemeine n-dimensionale Trapezregel für achsenparallele Rechteckgebiete aus?

Man teste das Verfahren mit der 2-dimensionalen Normalverteilung

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\ .$$

Dazu hole man sich die Dateien `Trapez2DVorl.m` und `Normalxy.m`.

Lösung: *Mit* $h = 1/n$, $x_i = ih$, $i = 0,\ldots,n$, $y_j = jh$, $j = 0,\ldots,n$ *gilt*

$$\begin{aligned} &\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y)\ \mathrm{d}x \approx \\ &\quad \frac{f(x_i,y_j) + f(x_{i+1},y_j) + f(x_i,y_{j+1}) + f(x_{i+1},y_{j+1})}{4}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) \\ &\quad = \frac{f(x_i,y_j) + f(x_{i+1},y_j) + f(x_i,y_{j+1}) + f(x_{i+1},y_{j+1})}{4}h^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow I \quad \approx \quad & h^2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} f(x_i, y_j) + \right. \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i, 0)}{2} + \frac{f(x_i, 1)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(0, y_j)}{2} + \frac{f(1, y_j)}{2} \\
& \left. + \frac{f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1)}{4} \right]
\end{aligned}
$$

Allgemein zerlege man den n-dimensionalen Quader

$$Q = [xmin_1, xmax_1] \times [xmin_2, xmax_2] \times \cdots \times [xmin_n, xmax_n]$$

durch $x_{i_j} = xmin_i + j(xmax_i - xmin_i)/n_i$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, n_i$. Die Gewichte der Funktionswerte an den Gitterpunkten durchlaufen dann die 2er-Potenzen $2^0, 2^{-1}, \ldots, 2^{-n}$ je nachdem ob es innere Gitterpunkte, innere Punkte einer Randhyperfläche usw. oder Eckpunkte sind. Anschließend ist die Summe der gewichteten Funktionswerte noch mit $\prod_i (xmax_i - xmin_i)$ zu multiplizieren.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  2-dimensionale Trapezregel
%
% Integrationsgebiet Rechteck im R^2
%
close all
clear all

n=600;
xmin=0;xmax=1;ymin=0;ymax=1; % Rechteckgrenzen
hx=(xmax-xmin)/n;
hy=(ymax-ymin)/n;

xi=[xmin:hx:xmax];
yj=[ymin:hy:ymax];
[X,Y]=meshgrid(xi,yj);
F=Normalxy(X,Y);
Integral=sum(sum(F(2:n,2:n),1),2); % Alle inneren Punkte mit Gewicht 1
Integral=Integral+1/2*(sum(F(1,2:n),2)+sum(F(n+1,2:n),2)...
         +sum(F(2:n,1),1)+sum(F(2:n,n+1),1));
Integral=Integral+1/4*(F(1,1)+F(1<n+1)+F(n+1,1)+F(n+1,n+1));
Integral=Integral*hx*hy;

fprintf('%s%30.16f \n',' Integralwert: ',Integral)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function f = Normalxy(x,y)
%
% 2-dim Normalverteilung
% mit Mittelwerten 0 Streuung 1 und Korrelationskoeffizient 0
%
f=1/(2*pi)*exp(-1/2*(x.*x+y.*y));
```