Hausübung

H 8 Splines

Gegeben seien die drei Punkte in der Ebene $(0,1), (1,2), (3,1)$. Konstruieren Sie

a) den linearen Spline $s_f^1(x) \in C^0([0,3])$ und

b) den kubischen Spline $s_f^3(x) \in C^2([0,3])$ mit natürlichen Randbedingungen.

a) Zur Konstruktion des linearen Splines kann die Zwei-Punkte-Form der Geraden-Gleichung dienen. Die beiden gesuchten Geradenstücke ergeben den Spline

$$s_f^1(x) \;=\; \begin{cases} x+1 & x \in [0,1] \\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x & x \in [1,3] \end{cases}.$$

b) Die Konstruktion des kubischen Splines erfolgt mit der Notation aus der Vorlesung. Demnach sind $c_0 = c_2 = 0$, und c_1 ist Lösung des „Gleichungssystems“

$$2c_1 \;=\; \delta_1 \;=\; \frac{6}{h_1 + h_0}\left(\frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_1 - f_0}{h_0}\right) \;=\; -3 \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 \;=\; -\frac{3}{2}.$$

Weiter gilt

$$a_0 \;=\; f_0 \;=\; 1 \qquad\qquad a_1 \;=\; f_1 \;=\; 2$$

$$b_0 \;=\; \frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(c_1 + 2c_0) \;=\; \frac{5}{4} \qquad\qquad b_1 \;=\; \frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}(c_2 + 2c_1) \;=\; \frac{1}{2}$$

$$d_0 \;=\; \frac{c_1 - c_0}{h_0} \;=\; -\frac{3}{2} \qquad\qquad d_1 \;=\; \frac{c_2 - c_1}{h_1} \;=\; \frac{3}{4}$$

Setzt man nun diese Koeffizienten in den Ansatz

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3,\; x \in [x_i, x_{i+1}]$$

ein, so ergeben sich die Spline-Stücke

$$s_f^3(x) \;=\; \begin{cases} -\frac{1}{4}x^3 \;+\; \frac{5}{4}x \;+\; 1 & x \in [0,1] \\ \frac{1}{8}x^3 \;-\; \frac{9}{8}x^2 \;+\; \frac{19}{8}x \;+\; \frac{5}{8} & x \in [1,3] \end{cases}$$

H 9 Interpolation im $\mathbb{R}^2$.

Gegeben seien die Funktionswerte einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ an den Ecken des Quadrates $I \times I$, $I = [0,1]$.

x	0	1	0	1
y	0	0	1	1
f	2	1	3	5

Interpolieren Sie bilinear, d.h. bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Interpolationspolynom der Form:

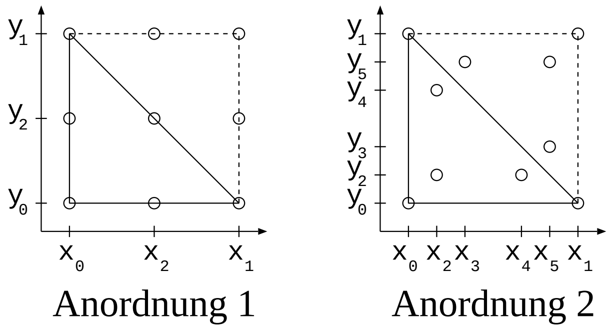
$$P_{1,1}(x,y) = a + bx + cy + dxy$$

Nach Skript gilt:

$$\begin{aligned}
P_{1,1}(x,y) &= f(0,0)\cdot L_{0,1}(x)\cdot L_{0,1}(y) + f(1,0)\cdot L_{1,1}(x)\cdot L_{0,1}(y)\\
&\quad + f(0,1)\cdot L_{0,1}(x)\cdot L_{1,1}(y) + f(1,1)\cdot L_{1,1}(x)\cdot L_{1,1}(y)\\
&= 2\cdot\frac{x-1}{-1}\cdot\frac{y-1}{-1} + 1\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{y-1}{-1} + 3\cdot\frac{x-1}{-1}\cdot\frac{y}{1} + 5\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}\\
&= 2\cdot(x-1)(y-1) - 1\cdot x(y-1) - 3\cdot(x-1)y + 5\cdot xy\\
&= (2-1-3+5)\cdot xy + (1-2)\cdot x + (3-2)\cdot y + 2\\
&= 3xy - x + y + 2
\end{aligned}$$

H 10 (*Stetige Interpolation in 2D*)
Eine Funktion $f : [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \to \mathbb{R}$ soll durch eine auf den Dreiecken der angegebenen Triangulierung stückweise quadratische, auf $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ stetige Funktion p interpoliert werden.

Um das Interpolationspolynom auf jedem Dreieck eindeutig bestimmen zu können, müssen auf jedem Dreieck sechs Stützstellen der Interpolation liegen. Die beiden Graphiken zeigen zwei Möglichkeiten, diese Stützstellen auf diese Dreiecke zu verteilen.



a) Zeigen Sie, daß man mit Anordnung 1 Stetigkeit auf $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ erhält.

b) Finden Sie ein Gegenbeispiel in Form einer möglichst einfachen Funktion f, um zu zeigen, daß sich bei Anordnung 2 nicht unbedingt Stetigkeit auf $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ ergeben muß. (Sie können hierzu den Spezialfall $x_0 = y_0 = -1, \quad x_1 = y_1 = 1$ verwenden; genaue Kennntnis der übrigen x_i und y_i ist nicht erforderlch.

a) *Auf jedem Dreieck T_i ist die Aufgabe, ein quadratisches Interpolationspolynom $p_i(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$ zu finden, das in allen sechs Stützstellen mit f übereinstimmt, eindeutig lösbar, und jede solche Teilfunktion ist nach Konstruktion stetig.*

Um zu zeigen, daß p auf $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ stetig ist, müssen wir also nur Stetigkeit auf den Punkten der Diagonalen nachweisen. Dazu bemerken wir, daß die Einschränkung von p auf die Diagonale eine quadratische Funktion ist. Da in Anordnung 1 drei Stützstellen auf der Diagonalen liegen, ist diese quadratische Funktion eindeutig bestimmt, muß also für beide Dreiecke identisch sein. Damit liegt auch auf der Diagonalen Stetigkeit von p vor.

b) *In Anordnung 2 liegen nur zwei Stützstellen auf der Diagonalen; Eindeutigeit kann also in diesem Fall nicht erwartet werden. Tatsächlich läßt sich hierzu ein Gegenbeispiel konstruieren:*

Wir betrachten die Funktionen

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2 \quad \text{und} \quad f_2(x,y) = -f_1(x,y) = 2 - x^2 - y^2$$

und definieren

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) & x + y > 0, \\ f_2(x,y) & x + y \leq 0. \end{cases}$$

Damit ist f eine auf jedem Dreieck quadratische Funktion, die in den Eckpunkten des Quadrates den Funktionswert 0, in den inneren Stützstellen des linken unteren Dreiecks positive und in den inneren Stützstellen des rechten oberen Dreiecks negative Funktionswerte annimmt.

Bestimmt man die Interpolierende p, so ergibt sich aufgrund der Eindeutigkeit der Interpolation (bis auf die Diagonale) wieder f selbst. Wir zeigen, daß f (und damit p) nicht stetig auf der Diagonalen des Quadrates $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ ist:
Dazu setzen wir $x = -y$ in f und erhalten $2x^2 - 2$ bzw. $2 - 2x^2$. Nur für $x = \pm 1$ (also in Eckpunkten) ergibt sich Übereinstimmung, und damit ist p in diesem Beispiel unstetig.

H 11 Programmierübung: Spline–Interpolation

Um durch Punkte in der Ebene eine geschlossene, zweimal stetig differenzierbare Kurve zu legen, sollen im folgenden periodische Splines verwendet werden.

a) Schreiben Sie ein Programm, dass zu gegebenen Daten (t_i, x_i) bzw. (t_i, y_i) den periodischen, interpolierenden, kubischen Spline berechnet.

b) Testen Sie ihr Programm, indem Sie die Funktion $\sin x$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ interpolieren. Starten Sie zuerst mit $m = 13$ Intervallen und verdoppeln Sie dann m auf 26 und dann 52.
Protokollieren Sie den maximalen Fehler auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ für $m = 13, 26$ und 52. Welche Beobachtungen bezüglich des Fehlers machen Sie, wenn Sie insbesondere die Konvergenzordnung der Approximation durch den Spline beachten?

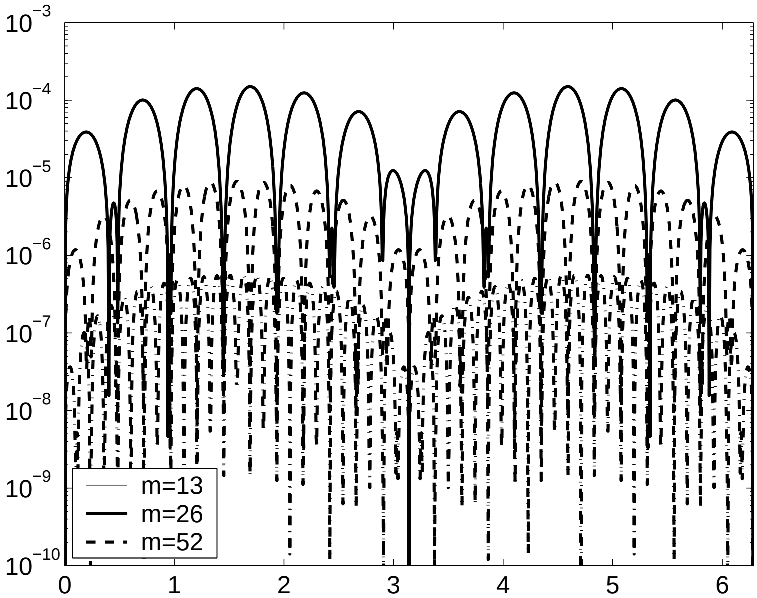
c) Verwenden Sie ihr Programm, um folgende Punkte in der Ebene durch eine parametrisierte Kurve zu interpolieren:
- $P_0 = (0,0), P_1 = (1,1), P_2 = (0,1), P_3 = (-1,1)$
- $P_0 = (0,0), P_1 = (1,0), P_2 = (1,1), P_3 = (0,1)$

Parametrisieren Sie die Kurve mit t und wählen Sie die Stützstellen für den Parameter t dazu auf folgende Art und Weise:

$$t_i - t_{i-1} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

`Hinweis:` Verwenden Sie zur Lösung des linearen Gleichungssystems einfach „\“.
Mit dem Befehl `find(x(1:n-1)<=z & z<x(2:n))` lässt sich derjenige Index i des Knotenvektors x finden, für den $x(i) \leq z \leq x(i+1)$ gilt. Auf diese Weise kann man das Intervall finden, in dem die betrachtete Stelle z liegt. Eine Tridiagonalmatrix lässt sich am einfachsten mit dem Befehl `diag` erzeugen.

b) *Der Plot des Fehlers sollte folgendermassen aussehen:*



Der maximale Fehler ist

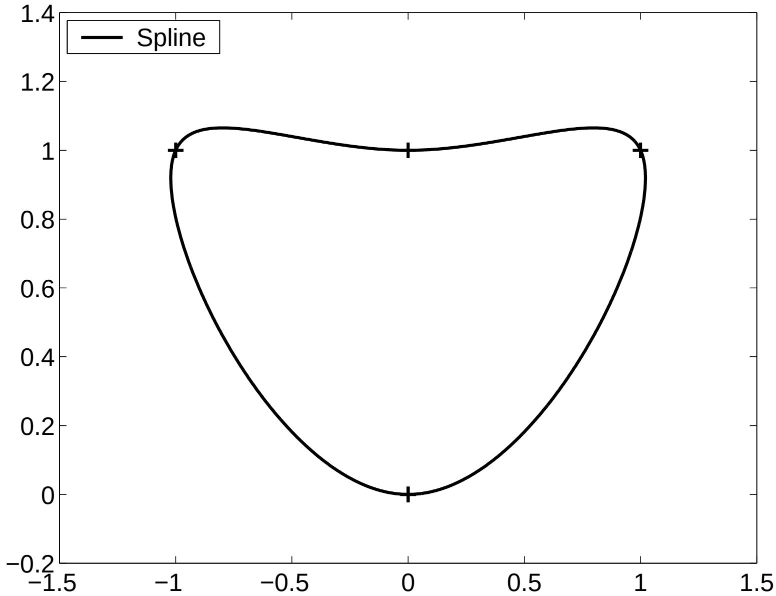
i	1	2	3
m	13	26	52
err	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-6}$	$5.5 \cdot 10^{-7}$

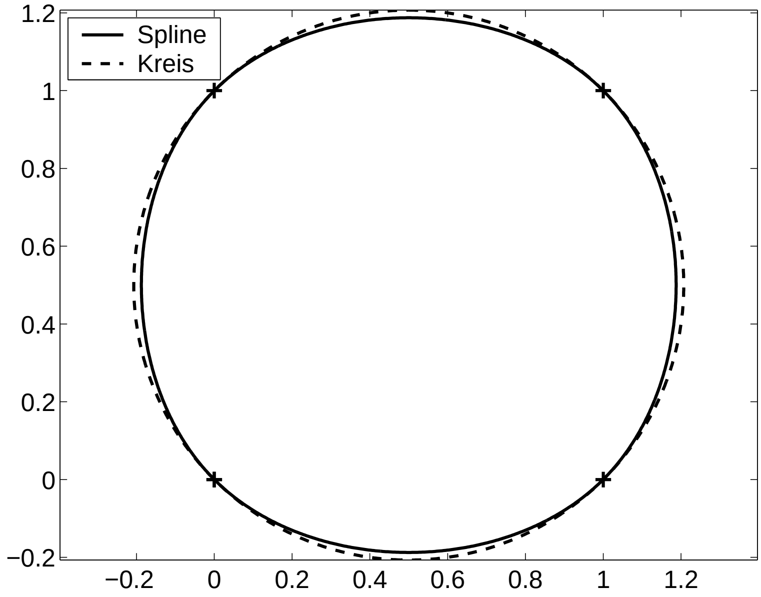
Betrachtet man den Quotienten von zwei aufeinanderfolgenden Fehlern ergeben sich die Werte

$$err(2)/err(1) = 6 \cdot 10^{-2} \text{ und } err(3)/err(2) = 6.1 \cdot 10^{-2} .$$

Dies kommt ziemlich nahe an den Faktor $2^{-4} = 6.25 \cdot 10^{-2}$ *heran, den man aus dem Satz über die Konvergenzordnung der Spline–Approximation erhält.*

c) *Der Plot der berechneten Lösungen sollte so aussehen:*


Spline
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5


Spline
Kreis
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2