# Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker
# Übung 13, Lösungsvorschlag

## Gruppenübung

**G 38** (*Newton-Verfahren*)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^3 - x$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-2, 2]$.

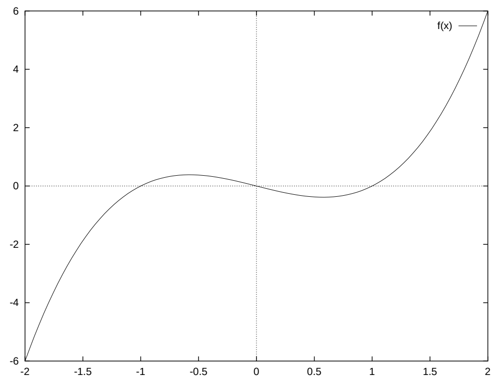
b) Führen Sie vier Schritte des Newton–Verfahrens durch, beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = 2$. Tragen Sie die einzelnen Schritte in die Skizze ein.

c) Ist der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ geeignet, um die Nullstelle $x_N = 0$ mit dem Newton-Verfahren zu finden?

d) Bestimmen Sie einen Startwert $x_0 \neq 0$ so, daß für den Wert nach dem ersten Schritt des Newton–Verfahrens $x_1 = -x_0$ gilt. Wie lauten die weiteren Folgenglieder?

e) Welche Startpunkte sind ungeeignet, um eine Nullstelle zu finden?

a) *Der Graph der Funktion $f$ hat folgende Gestalt*



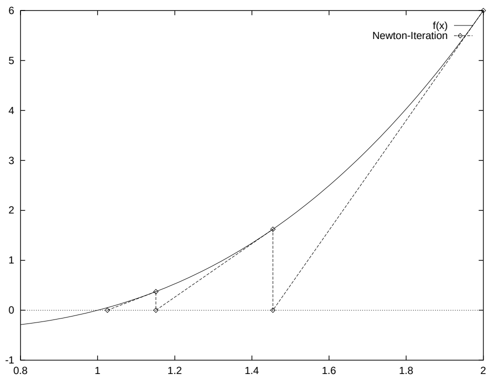

b) *Die Iterationsvorschrift des eindimensionalen Newton–Verfahrens ist gegeben durch*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad \textit{mit} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

*Die Iterationsfolge lautet damit*

| $k$ | $x^{(k)}$ | $f(x^{(k)})$ | $f'(x^{(k)})$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2.0000E+00 | 6.0000E+00 | 1.1000E+01 |
| 1 | 1.4545E+00 | 1.6228E+00 | 5.3471E+00 |
| 2 | 1.1510E+00 | 3.7399E-01 | 2.9747E+00 |
| 3 | 1.0253E+00 | 5.2592E-02 | 2.1538E+00 |
| 4 | 1.0009E+00 | 1.8194E-03 | 2.0055E+00 |

*Graphisch stellt sich die Iteration so dar*




c) *Nein! Mit dem Startpunkt* $x^{(0)} = 0.51$ *ergibt sich die Iterationsfolge*

| $k$ | $x^{(k)}$ | $f(x^{(k)})$ | $f'(x^{(k)})$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 5.1000E-01 | -3.7735E-01 | -2.1970E-01 |
| 1 | -1.2075E+00 | -5.5332E-01 | 3.3746E+00 |
| 2 | -1.0436E+00 | -9.2986E-02 | 2.2673E+00 |
| 3 | -1.0058E+00 | -5.1969E-03 | 2.0156E+00 |

*Graphisch bedeutet dies, dass die Tangente in* $x^{(0)} = 0.51$ *die x-Achse unterhalb* $-1$ *schneidet. Anhand des Graphen ist aber leicht einzusehen, dass eine Iterationsfolge, die einmal unterhalb* $-1$ *bzw. oberhalb* $1$ *angelangt ist, diese Bereiche nicht mehr verlässt.*

d) *Die Bedingung führt zur Gleichung*

$$x_0 - \frac{x_0^3 - x_0}{3x_0^2 - 1} = -x_0.$$

*Die Lösungen dieser Gleichung sind* $x_1 = 0$ *und* $x_{2/3} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$*. Für* $x^{(0)} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ *wird die Iteration in eine Endlosschleife eintreten, die zwischen diesen beiden Werten alterniert.*

e) *Ganz und gar ungeeignet sind die beiden Extremalpunkte* $x_T = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *und* $x_H = -\frac{1}{\sqrt{3}}$*, da dort die Tangenten waagerecht sind und die x-Achse niemals schneiden. Algebraisch bedeutet dies* $f'(x) = 0$ *im Nenner!*

*Ebenfalls ungeeignete Startpunkt sind* $x^{(0)} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ *aus Aufgabenteil d), da diese in eine Endlosschleife führen.*

**G 39** (*Mehrdimensionales Newton–Verfahren*)

Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um die Gleichung

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1 x_2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = 0$$

zu lösen. Starten Sie die Iteration bei $x^{(0)} = \binom{1}{0}$ und berechnen Sie 2 Schritte des Verfahrens.
Was ergibt sich für den Startpunkt $x^{(0)} = \binom{1}{1}$ ?

*Das Newton-Verfahren ist gegeben durch*

$$\begin{array}{lrcl} \textit{Löse das LGS} & \mathcal{J}_F(x^{(k)})d^{(k)} & = & -F(x^{(k)}) \\ \textit{und setze} & x^{(k+1)} & = & x^{(k)} + d^{(k)}. \end{array}$$

*Die Funktionalmatrix der Funktion $F$ lautet*

$$\mathcal{J}_F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

*Damit ergibt sich folgende Iteration*

| $k$ | $x^{(k)}$ | $-F(x^{(k)})$ | $\mathcal{J}_F(x^{(k)})$ | $d^{(k)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ |
| 1 | $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{120} \end{pmatrix}$ |
| 2 | $\begin{pmatrix} \frac{29}{30} = 0.966667 \\ \frac{31}{120} = 0.258333 \end{pmatrix}$ | | | |
| $\vdots$ | | | | |
| $\infty$ | $\begin{pmatrix} 0.970142 \\ 0.242536 \end{pmatrix}$ | | | |

*Der Startwert $x^{(0)} = \binom{1}{1}$ ergibt eine singuläre Funktionalmatrix $F'(x^{(0)})$. Damit bricht das Verfahren ab.*

**G 40** (*Vereinfachtes Newton-Verfahren*)
Das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - \frac{1}{2}x_2 e^{(1-x_2)} \\ 5x_1 - 5x_2 + 3 \end{pmatrix},$$

soll näherungsweise mit dem vereinfachten Newton–Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - AF(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gelöst werden. Die Matrix $A$ sei dabei gegeben durch $A := (\mathcal{J}_F(\bar{x}))^{-1}, \bar{x} = (1,1)^T$.

a) Schreiben Sie das Verfahren als Picard-Iteration, d.h. in der Form

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und zeigen Sie, dass die Iteration für alle Startwerte $x^{(0)}$ aus $\mathcal{D} := \mathbb{R} \times [0, 2]$ konvergiert.
**Hinweis:** Benutzen Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

b) Wie viele Schritte des Verfahrens sind erforderlich, um mit $x^{(0)} = \bar{x}$ eine Genauigkeit von $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq 10^{-3}$ zu garantieren? Benutzen Sie dazu den Banach'schen Fixpunktsatz.

c) Bestimmen Sie $x^{(3)}$. Vergleichen Sie den tatsächlichen Fehler mit dem Resultat aus b).

a) *Die Jacobimatrix der Funktion $F$ ist gegeben durch*

$$\mathcal{J}_F(x) = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2}(1-x_2)e^{(1-x_2)} \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} := \mathcal{J}_F(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

*Damit ist die Approximation der Newton-Matrix gegeben durch*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

*und die Iterationsfunktion $\Phi(x)$ lautet*

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 + \frac{1}{8}x_2 e^{(1-x_2)} \\ x_2 - x_1 + \frac{1}{8}x_2 e^{(1-x_2)} + x_1 - x_2 + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \frac{1}{8}x_2 e^{(1-x_2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Zum Nachweis der Konvergenz kann der Fixpunktsatz von Banach verwendet werden. Zu zeigen sind dann, dass*

1. *$\Phi$ eine Kontraktion ist,*
2. *$\mathcal{D}$ abgeschlossen ist,*
3. *$\Phi$ eine Selbstabbildung von $\mathcal{D}$ ist.*

*Die Kontraktion:*

$$\mathcal{J}_\Phi(x) = \frac{1}{8}(1-x_2)e^{(1-x_2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Damit ist*

$$\|\mathcal{J}_\Phi(x)\|_\infty = \frac{1}{8}|1-x_2|e^{(1-x_2)} \leq \frac{e}{8} \quad \text{für} \quad 0 \leq x_2 \leq 2.$$

*Als Lipschitz-Konstante kann somit $L = \frac{e}{8} \approx 0.3398 < 1$ gewählt werden. Damit ist $\Phi$ eine Kontraktion in $\mathcal{D}$.*

*Die Selbstabbildung von $\mathcal{D}$ wird lediglich durch die zweite Komponente eingeschränkt, da $x_1 \in \mathbb{R}$. Für $\Phi_2$ gilt*

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) &= \tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{8}x_2 e^{(1-x_2)} \leq \tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{8} \cdot 2e < 2 \\ \Phi_2(x) &= \tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{8}x_2 e^{(1-x_2)} \geq \tfrac{3}{5} > 0. \end{aligned}$$

*Da zusätzlich $\mathcal{D}$ abgeschlossen ist folgt mit dem Fixpunktsatz von Banach die Konvergenz für alle Startpunkte aus $\mathcal{D}$.*

*b) Mit $x^{(0)} = (1,1)^T$ ergibt sich $x^{(1)} = (\frac{1}{8}, \frac{29}{40})^T$, also $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \frac{7}{8}$. Nach dem Fixpunktsatz von Banach gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty.$$

*An $k$ ist also die Forderung*

$$\begin{array}{rcll} \frac{L^k}{1-L}\frac{7}{8} & \leq & 10^{-3} & \Leftrightarrow \\ L^k & \leq & \frac{8}{7}(L-1)10^{-3} & \Leftrightarrow \\ k\ln L & \leq & \ln(\frac{8}{7}(1-L)10^{-3}) & \Leftrightarrow (\ln L < 0) \\ k & \geq & \frac{\ln(\frac{8}{7}(1-L)10^{-3})}{\ln L} \approx 6.66 & \end{array}$$

*zu stellen. Nach höchstens 7 Schritten ist die Genauigkeitsforderung erfüllt.*

*c)*

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0.119311 \\ 0.719311 \end{pmatrix} \\ x^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0.119050 \\ 0.719050 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Die Fehlerabschätzung aus Teil b) ist offensichtlich sehr grob.*