Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker
Übung 10, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 28 Gegeben sei die Zerlegung $PA = LR$ mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Führen Sie die folgenden Aufgabenstellungen ohne explizite Berechnung von A durch.

a) In welcher Reihenfolge wurden die Zeilenvertauschungen vorgenommen?

b) Berechnen Sie die Determinante von A.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = (1, 2, 3)^T$.

a) *Zeilenvertauschungen aus P:*
Zuerst wurde die erste und die zweite Zeile vertauscht $(2, 1, 3)$.
Darauf die zweite und die dritte $(2, 3, 1)$.

b)

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}LR \\ \Rightarrow \ \det(A) &= \det(P^{-1}) \det(L) \det(R) = 1 \cdot 1 \cdot 36 = 36 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad PAx = Pb \\ &\Leftrightarrow \quad LRx = Pb \end{aligned}$$

Wir lösen daher $Lz = Pb$, $Rx = z$. Es folgt

$$z = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

G 29 Lösen Sie das Gleichungssystem $A\,x = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

durch Anwendung des Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung. Interpretieren Sie das Ergebnis als Zerlegung der Form $PA = LR$.

1	6	3	1	1	*Zeilentausch I gegen III*
2	8	5	2	2	
3	9^*	7	4	3	$*$ = *Spaltenpivot*
3	9	7	4	3	
2	8	5	2	2	$II = II - \frac{8}{9}I$
1	6	3	1	1	$III = III - \frac{2}{3}I$
3	9	7	4	3	
2	$\boldsymbol{\frac{8}{9}}$	$-\frac{11}{9}$	$-\frac{14}{9}$	$-\frac{2}{3}$	*Zeilentausch II gegen III*
1	$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$	$(-\frac{5}{3})^*$	$-\frac{5}{3}$	-1	$*$ = *Spaltenpivot*
3	9	7	4	3	
1	$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-1	
2	$\boldsymbol{\frac{8}{9}}$	$-\frac{11}{9}$	$-\frac{14}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$III = III - \frac{11}{15}II$
3	9	7	4	3	$\Rightarrow x_1 = (3 - 4x_3 - 7x_2) : 9 = -\frac{1}{5}$
1	$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-1	$\Rightarrow x_2 = (-1 - (-\frac{5}{3})x_3) : (-\frac{5}{3}) = \frac{4}{5}$
2	$\boldsymbol{\frac{8}{9}}$	$\boldsymbol{\frac{11}{15}}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{15} : (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{5}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{8}{9} & \frac{11}{15} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

G 30 Gegeben sei das Schema:

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & \boldsymbol{\frac{1}{2}} & 2 & 1 & 2 \\ 1 & \boldsymbol{\frac{1}{4}} & \boldsymbol{\frac{1}{2}} & -1 & -1 \\ 2 & \boldsymbol{\frac{1}{8}} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{array}.$$

Es wird behauptet, dieses Schema könnte aus der Anwendung des Gauß-Algorithmus mit Restmatrixpivotsuche, angewandt auf eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, entstanden sein. Überprüfen Sie die Behauptung, ohne A zu rekonstruieren, und geben Sie gegebenenfalls alle Einträge an, die dieser Behauptung widersprechen. Bitte begründen Sie Ihre Antwort!

a) *Wir müssen die folgenden beiden Bedingungen überprüfen:*

1) $|a_{kk}^{(k)}| \geq |a_{kl}^{(k)}|$ *für* $l > k$.
(Wäre das nicht so, so hätte man noch ein Spaltentausch in Schritt k durchführen können.)

2) $|l_{kj}| \leq 1$ *für* $k = 2, \ldots, n, \quad j = 1 \ldots, k-1$.
(Würde für einen Multiplikator $l_{kj} > 1$ gelten, so hätte man im Schritt k einen Zeilentausch vornehmen können.)

zu 1) $k = 1: \qquad 8 \geq 4 = |a_{12}|, \qquad 8 \geq 2 = |a_{13}|, \qquad 8 \geq 1 = |a_{14}|$
$k = 2: \qquad 2 \geq 1 = |a_{23}| \qquad 2 \geq 2 = |a_{24}|$

$k = 3: \qquad 1 \geq 1 = |a_{34}|$

Die erste Bedingung ist also erfüllt.

zu 2) *Alle l_{kj} erfüllen $|l_{kj}| \leq 1$ und somit auch die zweite Bedingung.*

Das angegebene Schema könnte also durchaus das Resultat eines Gauss-Algorithmus mit Restmatrixpivotsuche sein.

b) *An der Numerierung der Zeilen und Spalten sieht man, dass Zeilen und Spalten auf die gleiche Weise vertauscht wurden, es gilt also $Q = P^T$. Dieses gleichmäßige Vertauschen erhält aber die Symmetrie, d.h. A ist genau dann symmetrisch, wenn $B = PAP^T$ symmetrisch ist.*

Wird der Gauss-Algorithmus bei einer summetrischen Matrix ohne Vertauschung durchgeführt, dann gilt für die Multiplikatoren in der Matrix L, wegen $B = B^T$:

$$l_{ik} = \frac{b_{ik}^{(k)}}{b_{kk}^{(k)}} = \frac{b_{ki}^{(k)}}{b_{kk}^{(k)}} = \frac{r_{ki}}{r_{kk}}$$

Also:

$$l_{ik} \cdot r_{kk} = r_{ki} \qquad \text{für } i > k$$

Diese Bedingung überprüfen wir nun:

$$\begin{aligned}
k = 1 \quad &: \quad l_{21} \cdot r_{11} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 = r_{12} \\
& \quad\;\; l_{31} \cdot r_{11} = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 = r_{13} \\
& \quad\;\; l_{41} \cdot r_{11} = \frac{1}{8} \cdot 8 = 1 = r_{14} \\
k = 2 \quad &: \quad l_{32} \cdot r_{22} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 = r_{23} \\
& \quad\;\; l_{42} \cdot r_{22} = 1 \cdot 2 = 2 = r_{24} \\
k = 3 \quad &: \quad l_{43} \cdot r_{33} = 1 \cdot (-1) = -1 = r_{34}
\end{aligned}$$

Also ist LR symmetrisch und daher auch $A = P^T LRP$. Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Die Determinante einer Matrix ist das Produkt ihrer Eigenwerte:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(P^T LRP) \\
&= \underbrace{\det P^T}_{=\det P} \cdot \underbrace{\det L}_{=1} \cdot \det R \cdot \det P \\
&= \underbrace{(\det P)^2}_{=1} \cdot \det R \\
&= r_{11} \cdot r_{22} \cdot r_{33} \cdot r_{44} \\
&= 8 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 1 \\
&= -16
\end{aligned}$$

Somit ist das Produkt der Eigenwerte negativ, es gibt also mindestens einen negativen Eigenwert. Die Matrix ist daher **nicht** *positiv definit.*

G 31 Eine Matrix $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt obere Dreiecksmatrix, wenn $r_{ij} = 0$ für $i > j$.
Zeigen Sie:

a) Das Produkt zweier oberer (unterer) Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.

b) Für die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt $\det R = r_{11} \cdots r_{nn} = \prod_{j=1}^{n} r_{jj}$.
Hinweis: Verwenden Sie den Entwicklungssatz für Determinanten.

a) *Es seien $R = (r_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ zwei obere Dreiecksmatrizen und $A = R\tilde{R}$ deren Produkt. Dann gilt für $i > j$*

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} r_{ik}\tilde{r}_{kj} = \sum_{k=1}^{j} \underbrace{r_{ik}}_{=0} \tilde{r}_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} r_{ik} \underbrace{\tilde{r}_{kj}}_{=0} = 0.$$

b) *Die Determinante von R kann nach dem Entwicklungssatz für Determinaten in der Form*

$$\begin{aligned}
\det R &= \det \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & r_{nn} \end{pmatrix} \\
&= r_{11} \det \begin{pmatrix} r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix} \\
&= r_{11} r_{22} \det \begin{pmatrix} r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \cdots = \prod_{i=1}^{n} r_{ii}.
\end{aligned}$$

dargestellt werden.