Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker
Übung 8, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 22 Es sei das folgende zweistufige Runge–Kutta–Verfahren gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Führen Sie mit dem Verfahren einen Integrationsschritt mit $h = 1, x_0 = 0, y_0 = 1$ für die DGL $y' = \lambda y,\ \lambda < 0$ durch.

b) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion und überprüfen Sie, ob das Verfahren A-stabil ist.

a) *Einsetzen der gegebenen Werte* $h = 1$, $x_0 = 0$ *und* $y_0 = 1$ *in*

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} k_1 & = & f(x + \frac{1}{4}h, y + \frac{1}{4}hk_1) \\ k_2 & = & f(x + \frac{3}{4}h, y + \frac{1}{2}hk_1 + \frac{1}{4}hk_2) \\ \Phi_1 & = & \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{array} \right.$$

und lösen der Gleichungen ergibt für $y' = \lambda y$, $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\lambda}{1 - \frac{1}{4}\lambda} \\ k_2 &= \frac{(1 + \frac{1}{4}\lambda)\lambda}{(1 - \frac{1}{4}\lambda)^2} \\ \Phi &= \frac{\lambda}{(1 - \frac{1}{4}\lambda)^2} \\ y_{i+1} &= \frac{(1 + \frac{1}{4}\lambda)^2}{(1 - \frac{1}{4}\lambda)^2} \end{aligned}$$

b) *Zum Nachweis der A-Stabilität muß das Gebiet der absoluten Stabilität*

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |g(z) < 1\}.$$

bestimmt werden. Dabei ist $g(z)$ *die Stabilitätsfunktion, die sich ergibt, wenn man das zu untersuchende Verfahren auf die Testgleichung* $y' = \lambda y$ *anwendet und die entstehende Gleichung in der Form*

$$y_{i+1} = g(h \cdot \lambda) y_i$$

schreibt. Das Verfahren heißt dann A-stabil, wenn

$$G \supset \{z : Re(z) < 0\}.$$

Durch Anwenden von

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} k_1 & = & f(x + \frac{1}{4}h, y + \frac{1}{4}hk_1) \\ k_2 & = & f(x + \frac{3}{4}h, y + \frac{1}{2}hk_1 + \frac{1}{4}hk_2) \\ \Phi_1 & = & \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{array} \right.$$

auf die Testgleichung $y' = \lambda y$ erhält man

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda(y + \frac{1}{4}hk_1) \\ k_2 &= \lambda\left(y + \frac{1}{2}hk_1 + \frac{1}{4}hk_2\right). \end{aligned}$$

Auflösen nach k_1 und k_2

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\lambda}{1 - \frac{1}{4}\lambda h} y_i \\ k_2 &= \frac{(1 + \frac{1}{4}\lambda h)\lambda y_i}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} \end{aligned}$$

und Einsetzen in Φ ergibt

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h\Phi \\ &= y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ &= y_i + \frac{h}{2}\left(\frac{\lambda}{1 - \frac{1}{4}\lambda h} y_i + \frac{(1 + \frac{1}{4}\,h)\,y_i}{(1 - \frac{1}{4}\,h)^2}\right) \\ &= y_i + \frac{h}{2} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)\lambda + (1 + \frac{1}{4}\lambda h)\lambda}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \\ &= y_i + \frac{h}{2} \cdot \frac{2\lambda}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \\ &= y_i + \frac{h\lambda}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \\ &= \frac{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2 + h\lambda}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2}) y_i \\ &= \frac{(1 + \frac{1}{4}\lambda h)^2}{(1 - \frac{1}{4}\lambda h)^2} y_i \end{aligned}$$

Damit lautet die Stabilitätsfunktion

$$g(z) = \frac{(1 + \frac{1}{4}z)^2}{(1 - \frac{1}{4}z)^2}$$

Das Gebiet der absoluten Stabilität ist durch alle komplexen Zahlen gegeben, die die Bedingung

$$\left| \frac{(1 + \frac{1}{4}z)^2}{(1 - \frac{1}{4}z)^2} \right| < 1,$$

bzw.

$$|(z+4)^2| < |(z-4)^2|.$$

bzw.

$$|z+4| < |z-4|.$$

erfüllen. Geometrisch kann man dies in der komplexen Zahlenebene interpretieren als die Menge der Punkte, deren Abstand von der Zahl -4 *(Abstand* $= |z+4|$*) echt kleiner ist der Abstand zum Punkt* 4 *(Abstand* $= |z-4|$*). Dies sind aber genau die Punkte, deren Realteil* $Re(z) < 0$ *ist. Damit ist das Verfahren A-stabil.*

G 23 Gegeben seien ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2,3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \tilde{\gamma}_i & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} k_1 & = & f(t,y) \\ k_2 & = & f(t+h, y+hk_1) \\ k_3 & = & f(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{4}(k_1+k_2)) \\ \Phi_1 & = & \frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ \Phi_2 & = & \frac{1}{6}(k_1+k_2+4k_3) \end{array} \right.$$

und die homogene lineare autonome DGL $y' = -10y$ mit dem Anfangswert $y(0) = 1$. Testen Sie ob die Vorschlagsschrittweite $h = 0.1$ im Punkt $t = 0$ akzeptiert wird, wenn eine absolute Genauigkeit von $\mathtt{TOL} = 0.001$ auf dem Intervall $t \in [0,1]$ gefordert ist. Erfüllt die von der Schrittweitensteuerung vorgeschlagene Schrittweite den Test?

Die RK-Verfahren ergeben für $h = 0.1$

$$\begin{array}{rcl} k_1 & = & f(0,1) = -10(1) = -10 \\ k_2 & = & f(0+0.1, 1+0.1(-10)) = -10(1+0.1(-10)) = 0 \\ k_3 & = & f(0+\frac{0.1}{2}, 1+\frac{0.1}{4}(-10+0)) = -10(1+\frac{0.1}{4}(-10+0)) = -7.5 \\ \Phi_1 & = & \frac{1}{2}(-10+0) = -5 \\ \Phi_2 & = & \frac{1}{6}(-10+0+4(-7.5)) = -\frac{20}{3}. \end{array}$$

Die Näherungslösungen sind dann

$$\begin{array}{rcl} y_1^{[1]h} & = & 1+0.1(-5) = 0.5 \\ y_1^{[2]h} & = & 1+0.1(-\frac{20}{3}) = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Wegen

$$\begin{array}{rcl} \kappa_0 & = & \sqrt[2]{\dfrac{h \cdot \mathtt{TOL} \cdot \|y_0^h\|}{(t_{ENDE} - t_0) \cdot \|y_1^{[1]h} - y_1^{[2]h}\|}} \\ & = & \sqrt[2]{\dfrac{0.1 \cdot 0.001 \cdot 1}{1 \cdot 0.16667}} \\ & = & \sqrt[2]{0.0006} \;=\; 0.02449 \;<\; 1 \end{array}$$

wird die Schrittweite $h = 0.1$ verworfen.

Im Skript auf S.87 wird in diesem Fall die Schrittweite

$$\begin{aligned} \widetilde{h} &= 0.9\kappa_0 h \\ &= 0.9 \cdot 0.02449 \cdot 0.1 \,=\, 0.0022 \end{aligned}$$

vorgeschlagen. Für diese Schrittweite gilt

$$\begin{aligned} k_1 &= f(0,1) = -10(1) = -10 \\ k_2 &= f(0+0.0022, 1+0.0022(-10)) = -10(1+0.0022(-10)) = -9.78 \\ k_3 &= f(0+\tfrac{0.0022}{2}, 1+\tfrac{0.0022}{4}(-10-9.78)) = -10(1+\tfrac{0.0022}{4}(-10-9.78)) \\ &= -9.8910 \\ \Phi_1 &= \tfrac{1}{2}(-10-9.78) = -9.8898 \\ \Phi_2 &= \tfrac{1}{6}(-10-9.78+4(-9.891)) = -9.8906. \end{aligned}$$

Die Näherungslösungen sind dann

$$\begin{aligned} y_1^{[1]h} &= 1+0.0022(-9.89) = 0.9782425 \\ y_1^{[2]h} &= 1+0.0022(-9.8906) = 0.9782407 \end{aligned}$$

Somit ist diesmal $\|y_1^{[1]h} - y_1^{[2]h}\| = 1.7820 \cdot 10^{-6}$ *und*

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \sqrt[2]{\frac{h \cdot \mathtt{TOL} \cdot \|y_0^h\|}{(t_{ENDE} - t_0) \cdot \|y_1^{[1]h} - y_1^{[2]h}\|}} \\ &= \sqrt[2]{\frac{0.0022 \cdot 0.001 \cdot 1}{1 \cdot 1.7820 \cdot 10^{-6}}} \\ &= 1.1123 \,\geq\, 1 \end{aligned}$$

und daher erfüllt diese Schrittweite nun den Test.

G 24 Zu lösen sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay = \begin{pmatrix} -10000 & 4 & 1 \\ -1 & -100 & 2 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie Abschätzungen für die drei Eigenwerte von A an, die zeigen, daß alle Eigenwerte reell, einfach und echt negativ sind.

b) Stellen Sie die Bestimmungsgleichung für η_1 mit dem impliziten Euler Verfahren ('Euler rückwärts') zur numerischen Integration des Systems mit der Schrittweite $h = 10^{-2}$ auf.

c) Wäre die Anwendung des expliziten Euler Verfahrens ('Euler vorwärts') oder des expliziten Runge Kutta Verfahrens der Ordnung 4 mit $h = 10^{-2}$ sinnvoll? Begründen Sie ihre Entscheidung.

a) *Mit dem Kreissatz von Gerschgorin folgt*

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{3} K_i, \; mit \quad \begin{aligned} K_1 &= \{\lambda : \; |\lambda - (-10000)| \leq 5\} \\ K_2 &= \{\lambda : \; |\lambda - (-100)| \leq 3\} \\ K_3 &= \{\lambda : \; |\lambda - (-10)| \leq 10\}. \end{aligned}$$

Weil alle drei Kreise paarweise disjunkt sind, gibt es in jedem Kreis genau einen Eigenwert, d.h. die Eigenwerte sind einfach und reell, weil sonst der konjugiert komplexe Eigenwert in demselben Kreis liegen müßte. Weiter gilt für jeden Eigenwert $\lambda \leq 0$.

Um weiterhin zu zeigen, dass die Eigenwerte echt negativ sind, $\lambda < 0$, *betrachten wir im folgenden die transponierte Matrix,* A^T. *Diese hat die gleichen Eigenwerte wie* A *und liefert die Kreise*

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{3} K_i, \; mit \quad \begin{aligned} K_1 &= \{\lambda : \; |\lambda - (-10000)| \leq 6\} \\ K_2 &= \{\lambda : \; |\lambda - (-100)| \leq 9\} \\ K_3 &= \{\lambda : \; |\lambda - (-10)| \leq 3\}. \end{aligned}$$

Somit ist der Eigenwert in K_3 *ebenfalls echt kleiner Null.*

b) *Die implizite Eulervorschrift lautet* $\eta_{i+1} = \eta_i + hA\eta_{i+1}$

$$\begin{pmatrix} 101 & -0.04 & -0.01 \\ 0.01 & 2.00 & -0.02 \\ -0.05 & -0.05 & 1.10 \end{pmatrix} \eta_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) *Nein. Es muß* $|h\lambda_i|$, $i = 1, 2, 3$ *im Bereich der absoluten Stabilität des Verfahrens liegen, d.h. es müßte*

$$|10^{-2}\lambda_i| \leq 2 \; bzw. \; |10^{-2}\lambda_i| \leq 2.8...$$

sein, was nicht der Fall ist.