Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker
Übung 7, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 19 Es sei $y' = f(t,y)$ mit $f(t,y) = t + 2y$ gegeben. Welche Formel ergibt sich für y_1^h mit gegebenem (t_0, y_0^h), wenn man das durch den folgenden Butcher-Array gegebene Runge-Kutta-Verfahren anwendet ?

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Man interpretiert den obigen Array folgendermaßen:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t,y) \\ k_2 &= f(t + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 &= f(t + h, y + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)) \\ \Phi &= \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3 \end{aligned}$$

Setzt man für f die gegebene Funktion ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t,y) \quad = \quad t + 2y \\ k_2 &= f(t + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1) \\ &= (t + \frac{1}{2}h) + 2(y + \frac{1}{2}hk_1) \\ &= t + \frac{1}{2}h + 2y + ht + 2hy \\ k_3 &= f(t + h, y + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)) \\ &= (t + h) + 2(y + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)) \\ &= t + h + 2y + h((t + 2y) + ((1 + h)t + \frac{1}{2}h + (1 + h)2y)) \\ &= t + h + 2y + 2ht + 4hy + h^2t + \frac{1}{2}h^2 + 2h^2y \end{aligned}$$

Für y_1 ergibt sich

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h\Phi \\
&= y_0 + h(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3) \\
&= y_0 + \frac{h}{6}((t_0 + 2y_0) + 4(t_0 + \frac{1}{2}h + 2y_0 + ht_0 + 2hy_0) \\
&\quad +(t_0 + h + 2y_0 + 2ht_0 + 4hy_0 + h^2t_0 + \frac{1}{2}h^2 + 2h^2y_0)) \\
&= y_0 + \frac{h}{6}(6t_0 + 12y_0 + 3h + 6ht_0 + 12hy_0 + h^2t_0 + \frac{1}{2}h^2 + 2h^2y_0) \\
&= y_0 + \frac{h}{6}((6 + 6h + h^2)t_0 + (12 + 12h + 2h^2)y_0 + 3h + \frac{1}{2}h^2)
\end{aligned}$$

Es ergibt sich somit für obigen Butcher-Array und die Differentialgleichung $y' = t + 2x$ im ersten Schritt mit Schrittweite h

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}((6 + 6h + h^2)t_0 + (12 + 12h + 2h^2)y_0 + 3h + \frac{1}{2}h^2)$$

G 20 Gegeben sei das Koeffizientenschema eines expliziten Runge–Kutta–Verfahrens

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}
\end{array}$$

a) Welche Formel erhält man für y_1, wenn man das dadurch definierte Verfahren auf das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \qquad y(0) = 1$$

anwendet?

b) Mit welcher Potenz in h geht der Fehler $y_1 - y(h)$ gegen 0, wenn $h \to 0$? Wie groß wird demnach die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens sein?

a) *Man erhält aus dem Koeffizientenschema:*

$$\begin{aligned}
k_1(t, y, h) &= \lambda y \\
k_2(t, y, h) &= \lambda\Big(y + \frac{h}{2}k_1\Big) = \Big(\lambda + \frac{h}{2}\lambda^2\Big)y \\
k_3(t, y, h) &= \lambda\Big(y + \frac{h}{4}k_1 + \frac{3h}{4}k_2\Big) = \Big(\lambda + h\lambda^2 + \frac{3h^2}{8}\lambda^3\Big)y \\
y_1 &= y_0 + h\Big(\frac{1}{5}k_1(0, y_0, h) + \frac{3}{5}k_2(0, y_0, h) + \frac{1}{5}k_3(0, y_0, h)\Big) \\
&= 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{3}{40}(h\lambda)^3.
\end{aligned}$$

b) *Die exakte Lösung des Anfangswertproblem ist* $y(t) = e^{\lambda t}$. *Damit erhält man*

$$y_1 - y(h) = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{3}{40}(h\lambda)^3 - e^{\lambda h}\right)$$

Die ersten drei Terme $1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2$ *stimmen mit dem Anfang der Exponentialreihe überein. Aus der Abschätzung des Restgliedes der Taylorreihe ergibt sich:*

$$\begin{aligned}\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 - e^{\lambda h}\right| &= \left|\frac{\lambda^3 e^{\lambda\xi}}{3!}h^3\right|, \qquad \xi \in [0,h]\\ &\leq Ch^3\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$|y_1 - y(h)| \leq \left(C + \frac{3}{40}\right)h^3 = C'h^3.$$

Man erhält damit für den lokalen Abschneidefehler

$$|\rho(h,1,0)| = \frac{|y(h) - y_1|}{h} \leq Ch^2.$$

Es liegt somit die Vermutung nahe, dass das Verfahren eine Konsistenzordnung von 2 hat. (Dies ist auch der Fall.)

G 21 Zeigen Sie, daß die Trapezregel konsistent von der Ordnung 2 ist.

Die Konsistenzordnung ist gegeben durch die Ordnung des lokalen Abschneidefehlers ρ. *Dieser ist definiert als*

$$\rho = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t, y(t), h).$$

Da $y(t+h)$ *Taylor-entwickelt werden kann um den Punkt* t, *erhalten wir für* $y(t+h)$

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \mathcal{O}(h^3).$$

Da $y(t)$ *Lösung des AWP* $y'(t) = f(t, y(t))$ *ist, folgt mit* $y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))y'(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))f(t, y(t))$

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{h^2}{2}\left(f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))f(t, y(t))\right) + \mathcal{O}(h^3).$$

Im Falle der Trapezregel ist die Verfahrensvorschrift

$$\Phi(t, y(t), h) = \frac{1}{2}(f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h))).$$

Hier liefert zweidimensionale Taylor-Entwicklung

$$f(t+h, y(t+h)) = f(t, y(t)) + h\left(f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))f(t, y(t))\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

Setzt man diese Ergebnisse für $y(t+h)$ und für $f(t+h, y(t+h))$ ein, um den lokalen Abschneidefehler zu berechnen, bekommt man

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t, y(t), h) \\
&= f(t, y(t)) + \frac{h}{2}\left(f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))f(t, y(t))\right) + \mathcal{O}(h^2) \\
&\quad -\frac{1}{2}(f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h))) \\
&= f(t, y(t)) + \frac{h}{2}\left(f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))f(t, y(t))\right) + \mathcal{O}(h^2) \\
&\quad -\frac{1}{2}[f(t, y(t)) + f(t, y(t)) + h(f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))f(t, y(t))) + \mathcal{O}(h^2)] \\
&= 0 + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

Somit ist die Trapezregel konsistent von der Ordnung 2.