Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker
Übung 6, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 16 Wir betrachten das Dreieck T mit den Eckpunkten (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k). Gesucht ist eine Quadraturformel der Form

$$\int_T f(x,y)d(x,y) \approx wf(x_0, y_0).$$

Bestimmen Sie den Knoten (x_0, y_0) und das Gewicht w so, daß die Quadraturformel für affin-lineare Funktionen exakt ist.

Wir rechnen auf dem Einheitsdreieck T_0 mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ und transformieren das Ergebnis mit Hilfe der Formel auf Seite 63 auf das Dreick T. Wir setzen die Basisfunktionen 1, x, y ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{T_0} d(x,y) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} dydx = \frac{1}{2} = w \\
\int_{T_0} xd(x,y) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xdydx = \frac{1}{6} = wx_0 \\
\int_{T_0} yd(x,y) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} ydydx = \frac{1}{6} = wy_0
\end{aligned}$$

Dies ergibt $w = \frac{1}{2}$ und $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
Anwendung der Transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + A_T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad A_T = \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{bmatrix}$$

ergibt

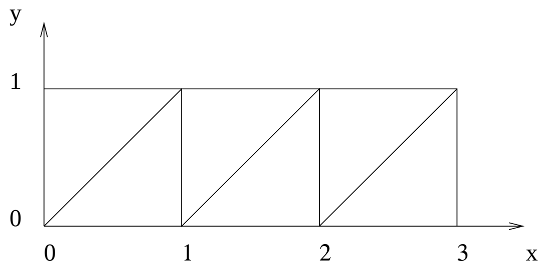
$$\begin{aligned}
\int_T f(x,y)d(x,y) &= \int_{T_0} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))|\det(A_T)|d\xi d\eta \\
&\approx |T| f\left(\frac{1}{3}(x_i + x_j + x_k), \frac{1}{3}(y_i + y_j + y_k)\right).
\end{aligned}$$

Dabei ist $|T|$ der Flächeninhalt von T.

G 17 Bestimmen Sie mit der Schwerpunktregel eine Näherung des Integrals

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^3 \frac{x\,y}{1+x}\,dx\,dy \\
(&= \frac{3 - \ln(4)}{2} = 0.80685)
\end{aligned}$$

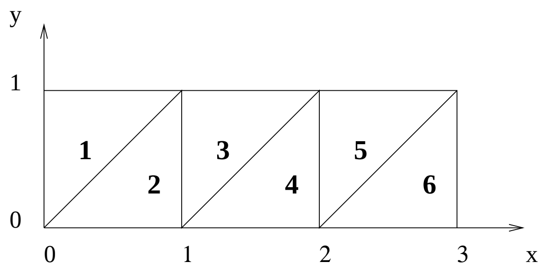
unter Verwendung der Zerlegung



Die Schwerpunktregel für eine beliebige Triangulation mit Dreiecken T_i und den zugeordneten Schwerpunkten $(x_S, y_S)_i$ ist

$$I \approx \sum_i |T_i| f((x_S, y_S)_i).$$

Die sechs Dreiecke T_i der Triangulation sollen wie folgt numeriert werden



Die Fläche eines Dreiecks beträgt $|T_i| = \frac{1}{2}$.

Die Koordinaten des Schwerpunktes eines Dreiecks sind genau die Mittelwerte der entsprechenden Koordinaten seiner Eckpunkte:

$$x_S = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad \textit{und} \quad y_S = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

Die Schwerpunkte und die entsprechenden Funktionsauswertungen lauten also

Dreieck	(x_S, y_S)	$f(x_S, y_S)$
T_1	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$\frac{1}{6} = 0.1667$
T_2	$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{2}{15} = 0.1333$
T_3	$(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$	$\frac{8}{21} = 0.3810$
T_4	$(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{5}{24} = 0.2083$
T_5	$(\frac{7}{3}, \frac{2}{3})$	$\frac{7}{15} = 0.4667$
T_6	$(\frac{8}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{8}{33} = 0.2424$
		$\Sigma = 1.5984$

Die Integralnäherung ist somit $I \approx \frac{1}{2}1.5984 = 0.7992$.

G 18 Die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ kann man lösen, indem man die zugehörige Integralgleichung

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_i+h} f(\xi, y(\xi))\, d\xi$$

betrachtet.

a) Bestimmen Sie die Ordnung der folgenden Quadraturformel:

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)\, f(a) + \text{Rest}$$

b) Benutzen Sie obige Quadraturformel, um nacheinander Näherungen für die Werte $y_1, y_2, \ldots, y_4$ mit $y_i = y(x_i)$ für die Differentialgleichung

$$y' = x\, y^2, \qquad y(0) = y_0 = 1,$$

im Falle von $h = \frac{1}{4}$ zu erhalten. Vergleichen Sie diese approximative Lösung mit der wahren Lösung.

a) *Die Ordnung der Quadraturformel kann durch Anwendung auf die Basispolynome $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ usw. bestimmt werden:*

$$\int_a^b f_0(x)\, dx = \int_a^b 1\, dx = b - a$$

Die Quadraturformel liefert:

$$(b-a)\, f_0(a) = b - a$$

Somit werden Polynome vom Grad 0 exakt integriert.

$$\int_a^b f_1(x)\, dx = \int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Die Quadraturformel liefert:

$$(b-a)\, f_1(a) = (b-a)\, a = ab - a^2$$

Es existiert also ein Polynom vom Grad 1, welches durch die Quadraturformel nicht exakt integriert wird.

Damit ergibt sich, dass die Quadraturformel von der genauen Ordnung 1 ist.

b) *Mit Hilfe der angegebenen Quadraturformel läßt sich der folgende Algorithmus aufstellen:*

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i)\ f(x_i, y_i)$$

für $i = 0, 1, \ldots, 3$. *Durch rekursives Ausrechnen ergibt sich:*

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \left(\frac{1}{4} - 0\right) f(0, y_0) = 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 = 1 \\
y_2 &= y_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) f(\tfrac{1}{4}, y_1) = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} \cdot 1^2\right) = \frac{17}{16} \\
y_3 &= y_2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) f(\tfrac{1}{2}, y_2) = \frac{17}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{17}{16}\right)^2\right) \approx 1.203613 \\
y_4 &= y_3 + \left(1 - \frac{3}{4}\right) f(\tfrac{3}{4}, y_3) = 1.203613 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} \cdot 1.203613^2\right) \approx 1.475242
\end{aligned}$$

Nun vergleichen wir dieses Ergebnis mit der exakten Lösung der DGL. Hierzu lösen wir die DGL durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
y' &= xy^2 \\
\int \frac{1}{y^2}\, dy &= \int x\, dx + c \\
-\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}x^2 + c \\
y &= \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + c}
\end{aligned}$$

Bestimme nun die Konstante c *mit Hilfe der Anfangsbedingung:*

$$y(0) = 1 = \frac{-1}{c} \qquad \Rightarrow \qquad c = -1$$

Und somit ergibt sich als Lösung an der Stelle $x = 1$*:*

$$y(1) = \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2\right)^{-1} = 2$$

D.h. wir haben einen Fehler von $|2 - 1.475242| = 0.524758$ *an der Stelle* $x = 1$.