Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker
Übung 5, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 13 Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^3 \frac{e^t}{t^2}\,dt$$

näherungsweise mit der 3-Punkt Gauß-Quadratur-Formel und schätzen Sie den Quadraturfehler ab.

Hinweis: $\left|\frac{d^6}{dt^6}\frac{e^t}{t^2}\right| \leq 30$ für $t \in [2,3]$.

Die Gauß-Quadraturformel lautet in der allgemeine Form

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k^{(n)} f(\bar{x}_k^{(n)}) \quad \text{mit} \quad \bar{x}_k^{(n)} = \frac{b-a}{2}x_k^{(n)} + \frac{b+a}{2}.$$

In folgender Tabelle sind die Nullstellen des Legendre-Polynoms $x_k^{(2)}$, die transformierten Stützstellen $\bar{x}_k^{(2)}$, die Gewichte $\beta_k^{(2)}$, die Punktauswertungen von f und die Produkte $\beta_k^{(2)} f(\bar{x}_k^{(2)})$ angegeben.

k	$x_k^{(2)}$	$\bar{x}_k^{(2)}$	$\beta_k^{(2)}$	$f(\bar{x}_k^{(2)})$	$\beta_k^{(2)} f(\bar{x}_k^{(2)})$
0	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	2.112702	0.5555556	1.852927	1.029404
1	0	2.5	0.8888889	1.949199	1.732622
2	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	2.887298	0.5555556	2.152556	1.195864
				$0.5 \cdot \Sigma =$	1.978945

Die exakte Darstellung des Integrals ist

$$\int_2^3 \frac{e^t}{t^2}dt = 0.5\sum_{k=0}^{2}\beta_k^{(n)} f(\bar{x}_k^{(n)}) + \left(\frac{d^6}{dt^6}\frac{e^t}{t^2}\right)_{t=\xi}\frac{(3!)^4}{7(6!)^3}.$$

Mit dem Hinweis ergibt sich dann eine Fehlerabschätzung von

$$\left|\int_2^3 \frac{e^t}{t^2}dt - 1.978945\right| \leq 30\frac{(3!)^4}{7(6!)^3} = 1.488 \cdot 10^{-5}.$$

G 14 Sei T das Dreieck mit den Eckpunkten (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k). Mittels der iterierten Simpsonregel soll eine Näherung für das Integral

$$\int_T f(x,y)d(x,y)$$

hergeleitet werden.

a) Wir betrachten zunächst das Einheitsdreieck T_0 mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Leiten Sie eine Approximation für das Integral

$$\int_{T_0} f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)dydx$$

her, indem Sie zuerst das innere und dann das äußere Integral mit der Simpsonregel approximieren.

b) Leiten Sie mit Hilfe einer Variablentransformation eine Formel für beliebige Dreiecke T her.

a) *Die Simpsonformel für das innere Integral lautet*

$$\int_0^{1-x} f(x,y)dy \approx \frac{1-x}{6}\left(f(x,0)+4f(x,\frac{1-x}{2})+f(x,1-x)\right).$$

Für das äußere Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{1-x}{6}\left(f(x,0)+4f(x,\frac{1-x}{2})+f(x,1-x)\right)dx \\
\approx\ &\frac{1}{6}\Big[\frac{1}{6}\{f(0,0)+4f(0,\frac{1}{2})+f(0,1)\} \\
&+4(\frac{1}{12}\{f(\frac{1}{2},0)+4f(\frac{1}{2},\frac{1}{4})+f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}) \\
&+\frac{0}{6}\{f(1,0)+4f(1,0)+f(1,0)\}\Big] \\
&=\frac{1}{36}\big(f(0,0)+4f(0,\frac{1}{2})+f(0,1)+2f(\frac{1}{2},0)+8f(\frac{1}{2},\frac{1}{4})+2f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\big).
\end{aligned}$$

b) *Anwendung der Transformation (siehe Skript)*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + A_T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad \mathit{mit} \quad A_T = \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{bmatrix}$$

ergibt

$$\begin{aligned}
\int_T f(x,y)d(x,y) &= \int_{T_0} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))|\det(A_T)|d\xi d\eta \\
&\approx \frac{|T|}{18}\big(f(x_i,y_i)+4f(\frac{x_i+x_k}{2},\frac{y_i+y_k}{2})+f(x_k,y_k) \\
&+2f(\frac{x_i+x_j}{2},\frac{y_i+y_j}{2})+8f(\frac{x_i+2x_j+x_k}{4},\frac{y_i+2y_j+y_k}{4}) \\
&+2f(\frac{x_j+x_k}{2},\frac{y_j+y_k}{2})\big).
\end{aligned}$$

Dabei ist $|T|$ der Flächeninhalt des Dreiecks T.

G 15 Mit den bekannten Quadraturformeln können auch uneigentliche Integrale approximiert werden. Der Schlüssel dazu ist z.B. die Transformation

$$z = \frac{1}{x - b + 1}$$

Approximieren Sie das Integral

$$\int_1^\infty xe^{-x}dx$$

durch die Anwendung der Transformation und Verwendung der Gauß-Quadraturformel mit 3 Knoten. Vergleichen Sie mit dem exakten Wert.

Wir transformieren zuerst mittels $z = \frac{1}{x}$ auf das Einheitsintervall und führen anschliessend eine lineare Substitution auf das Intervall $[-1, 1]$ durch, das der Gauss-Legendre-Quadratur zugrundeliegt: $s = 2z - 1$. Das ergibt insgesamt

$$\int_1^\infty xe^{-x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{z^3} e^{-\frac{1}{z}}\, dz = 4 \int_{-1}^{+1} \frac{1}{(s+1)^3} e^{-\frac{2}{s+1}}\, ds.$$

Das letzte Intgral werten wir mit der Gauß-Quadratur mit 3 Knoten aus. Die Knoten sind die Nullstellen des Legendre-Polynoms $L_3(s) = \frac{5}{2}s^3 - \frac{3}{2}s$, also $-\sqrt{\frac{3}{5}}$, 0 und $+\sqrt{\frac{3}{5}}$, und die zugehörigen Gewichte lauten $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{9}$, und $\frac{5}{9}$. Somit ist der Näherungswert

$$Q = 4\left(\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{-\sqrt{\frac{3}{5}} + 1} e^{-\frac{2}{-\sqrt{\frac{3}{5}}+1}} + \frac{8}{9} \cdot e^{-2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{5}} + 1} e^{-\frac{2}{\sqrt{\frac{3}{5}}+1}}\right) \approx 0.6372180.$$

Den exakten Wert des Integrals erhälten man durch partielle Integration

$$\int_1^\infty xe^{-x}\, dx = \left[-xe^{-x}\right]_1^\infty + \int_1^\infty xe^{-x}\, dx \quad = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_1^\infty = \frac{2}{e} \approx 0.7357589.$$