Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker
Übung 4, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 10 Interpolationspolynome können verwendet werden, um Integrale über Funktionen in einem Intervall $[a, b]$ nur durch Funktionsauswertungen zu approximieren. Eine Variante (Trapez–Regel) ergibt sich, wenn die Funktion an den Intervallgrenzen a, b ausgewertet wird und die lineare Interpolierende integriert wird.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = (b-a)\left(\omega_0 f(a) + \omega_1 f(b)\right).$$

a) Bestimmen Sie zuerst für den Spezialfall $a = -1$ und $b = 1$, also das Intervall $[-1, 1]$, die Gewichte ω_0, ω_1.
Stellen Sie dazu zuerst das lineare Interpolationspolynom $p_1(x)$ zu den Stützstellen $(-1, f(-1))$ und $(1, f(1))$ auf. Integrieren Sie dann $p_1(x)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der obigen Formel, um die Gewichte ω_0 und ω_1 zu erhalten.

b) Führen Sie die Integration von f über $[a, b]$ mittels Substitution auf die Integration über das Intervall $[-1, 1]$ zurück. Verwenden Sie dann das Ergebnis von Aufgabe a), um die Gewichte zu bestimmen.
Hinweis: Die Substitution ist $t = \frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$.

a) *Das Interpolationspolynom nach Lagrange ist gegeben durch*

$$p_1(x) = f(-1)\left(\frac{x-1}{-1-1}\right) + f(1)\left(\frac{x+1}{1+1}\right)$$

Die Integration des Interpolationspolynoms

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 p_1(x)dx &= -\frac{1}{2}f(-1)\int_{-1}^1 (x-1)dx + \frac{1}{2}f(1)\int_{-1}^1 (x+1)dx \\ &= -\frac{1}{2}f(-1)\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^1 + \frac{1}{2}f(1)\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^1 = f(-1) + f(1).\end{aligned}$$

Damit $\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$.

b) *Substitution aus Hinweis für das Integral von f über $[a, b]$:*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt \approx \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 p_1\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)dt \\ &= (b-a)\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right)\end{aligned}$$

G 11 Approximieren Sie das Integral

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{2+\sin(10\pi x)}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

numerisch mit der summierten Trapezregel $T(h)$ und der summierten Simpsonregel $S(h)$. Verwenden Sie für die Trapezregel $h = 0.125$ und für die Simpsonregel $h = 0.25$. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.000	1.0	0.375	1.546918	0.750	2.0
0.125	1.546918	0.500	1.0	0.875	0.738796
0.250	0.666667	0.625	0.738796	1.0	1.0

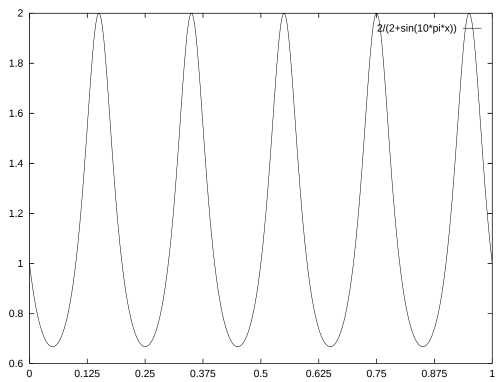
Die summierte Trapezregel für 9 Knoten (8 Teilintervalle) ergibt im Gesamtinterval $[0, 1]$

$$T(h) = \frac{h}{2}\left(f(0) + 2\sum_{i=1}^{7} f(ih) + f(1)\right) = 1.1547620.$$

Die summierte Simpsonregel für 9 Knoten (4 Teilintervalle) ergibt

$$S(h) = \frac{h}{6}\left(f(0) + 2\sum_{i=1}^{3} f(2i\frac{h}{2}) + 4\sum_{i=1}^{4} f((2i-1)\frac{h}{2}) + f(1)\right) = 1.1507936.$$

Offenbar liefert die summierte Trapezregel eine bessere Näherung als die summierte Simpsonregel, da der exakte Integralwert 1.1547005 beträgt.



Da die Funktion eine Periode von $\frac{1}{5}$ *hat und sehr stark oszilliert wirken sich die Ableitungen in den Fehlertermen sehr stark aus. Mit einer geeigneten Fehlerdarstellung zeigt sich, daß* $T(h)$ *für periodische Funktionen auf dem Periodenintervall immer optimal ist.*

G 12 Ist es möglich, ω_0 und x_0 geschickt so zu wählen, dass

$$\int_0^1 f(x)dx = \omega_0 f(x_0)$$

für alle $f \in \Pi_2$ gilt ?

Um zu untersuchen, ob eine Quadraturformel Polynome vom Maximalgrad 2 exakt integriert, ist es ausreichend, dies für die Polynome $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ *und* $p_2(x) = x^2$ *zu untersuchen, da diese eine Basis von* Π_2 *bilden. Außerdem nutzen wir dies hier, um* ω_0 *und* x_0 *zu bestimmen.*

$$\int_0^1 1\ dx = 1 = \omega_0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2} = \omega_0 x_0$$

Daraus erhält man: $w_0 = 1$ *und* $x_0 = \frac{1}{2}$ *und*

$$\int_0^1 f(x)\ dx \approx f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Somit sind Gewicht und Knoten schon bestimmt, so dass Polynome vom Maximalgrad 1 *exakt integriert werden. Nun betrachten wir* $p_2(x) = x^2$*:*

$$1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{aber} \quad \int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}.$$

Die Rechteckregel ist also nicht exakt für p_2*, und daher nur für Polynome aus* Π_1.